ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 52

Н. М. БЕСКИН

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1973

513
Б 53
УДК 513.0

АННОТАЦИЯ

В этой брошюре излагаются разные теории, к которым приводит углубленное изучение задачи о делении отрезка в данном отношении. Разбирая эту элементарную задачу и смежные вопросы, читатель совершит небольшое путешествие по математике, соприкоснется с аффинной и проективной геометрией и теорией групп, в большинстве случаев без упоминаний этих названий.

Книга рассчитана на учащихся старших классов; изложение в основных частях доступно для школьников 7—8 классов.

Николай Михайлович Бескин

Деление отрезка в данном отношении

(Серия «Популярные лекции по математике»)

М., 1973 г., 64 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редактор *Е. Н. Земская* Корректор *Е. Я. Строева*

Сдано в набор 22/IX 1972 г. Подписано к печати 12/I 1973 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 2. Услови. печ. л. 3,36. Уч.-изд. л. 3,08. Тираж 100 000 экз. Т-00709. Цена книги 9 коп. Заказ № 1202

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография изд. «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

Б $\frac{0222-1705}{042(02)-73}$ 83-73

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 4

ВВЕДЕНИЕ

1. Ориентация прямой и отрезка 5
2. Направленные отрезки 6

Глава I

ПРОСТОЕ ОТНОШЕНИЕ

3. Формулировка задачи 9
4. Решение задачи 12
5. Механическое истолкование задачи 16
6. Инвариантность простого отношения относительно параллельного проектирования. 16
7. Перестановка элементов в простом отношении 17
8. Групповое свойство простого отношения 20
9. Несобственные точки 25
10. Разделение точек на прямой 29
11. Теорема Чевы 33
12. Теорема Менелая 40

Глава II

СЛОЖНОЕ ОТНОШЕНИЕ

13. Понятие о сложном отношении 43
14. Инвариантность сложного отношения относительно центрального проектирования 45
15. Перестановка элементов в сложном отношении 47
16. Гармонические четверки 50
17. Построение четвертой точки по сложному отношению 53
18. Теорема о полном четырехвершиннике 56
19. Групповое свойство сложного отношения 59

Задачи 60

Ответы и решения 62

ПРЕДИСЛОВИЕ

Некоторые школьники обладают хорошим математическим аппетитом. Их не удовлетворяют порции математики, отмеренные школьной программой. Где же искать добавки?

Увеличить свои математические познания можно вширь или вглубь. Вширь — это значит изучать новые разделы математики. Вглубь — это значит более основательно рассматривать вопросы, входящие в школьную программу. Ни о каком разделе математики ни один человек не имеет права сказать «я это полностью знаю». В самом элементарном вопросе скрываются неожиданные связи с другими вопросами, и этот процесс углубления не имеет конца. Можно снова и снова возвращаться к знакомому разделу и каждый раз (если хорошо подумать) узнавать что́-нибудь новое.

Эта книжка поведет читателя вглубь. Разбирая весьма элементарную задачу «разделить отрезок в данном отношении», мы узна́ем много нового.

К самой задаче мы приступим в главе I. Введение содержит технические сведения, которые необходимы для разработки основной темы.

Автор

ВВЕДЕНИЕ

1. Ориентация прямой и отрезка. На прямой существуют два различных направления. Ориентировать прямую — значит выбрать на ней одно из этих двух направлений. Прямая, на которой выбрано одно из двух направлений, называется ориентированной прямой или осью. В дальнейшем мы словом «прямая» всегда будем называть неориентированную прямую. На ней оба направления равноправны.

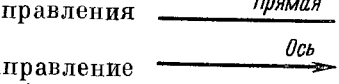

Рис. 1.

На чертеже выбранное направление обычно отмечается стрелочкой (рис. 1). Можно сказать, что ось это — пара, состоящая из следующих двух элементов: 1) прямая, 2) одно из двух возможных направлений на ней.

Отрезок есть часть прямой, ограниченная двумя точками. Эти точки — концы отрезка (они также принадлежат отрезку). Концы отрезка можно упорядочить, т. е. считать один первым, а другой вторым. Обычно первый называется началом отрезка, а второй — просто концом. Отрезок с упорядоченными концами называется ориентированным отрезком. На чертеже, чтобы показать ориентированный отрезок, надо различить его концы, например обозначить их разными буквами, поставить в одном из них стрелочку и т. д. Можно сказать, что ориентированный отрезок это — пара, состоящая из следующих двух элементов: 1) отрезок, 2) один из двух его концов (считаемый первым или началом).

При обозначении отрезка двумя буквами в случае неориентированного отрезка порядок этих букв безразличен: AB и BA — один и тот же отрезок. В случае же ориентированного отрезка принято на первом месте ставить начало, а на втором — конец. Таким образом, AB и BA — разные отрезки (они различаются ориентацией).

2. Направленные отрезки. Направленным отрезком называется ориентированный отрезок, расположенный на оси.

Отрезок AB на рис. 2, *а* (считается, что A — начало, B — конец) не есть направленный отрезок: хотя он и ориентирован, но прямая, на которой он лежит, не ориентирована. Отрезок на рис. 2, *б* — тоже не направленный (он сам не ориентирован). Отрезок AB на рис. 2, *в* — направленный.

Выходит, что для задания направленного отрезка необходимо назначить две ориентации: 1) на самом отрезке, 2) на прямой, на которой он лежит. Эти две ориентации назначаются независимо друг от друга, т. е. каждая любым из двух возможных способов.

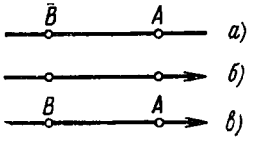

Рис. 2.

Каждый отрезок имеет длину. Длина — неотрицательное число. Она равна нулю лишь в том случае, когда концы отрезка совпадают, т. е. отрезок вырождается в точку, для всякого же невырожденного отрезка длина строго положительна. Длину отрезка AB мы будем обозначать символом $\overline{AB}$. При определении длины отрезка его ориентация не играет роли.

Направленному отрезку, кроме длины, можно приписать знак по следующему правилу: *направленный отрезок считается положительным (отрицательным), если его направление* [1] *совпадает (не совпадает) с направлением оси.*

Если отрезок, хотя бы и ориентированный, лежит на неориентированной прямой, то ему нельзя приписать знак.

Итак, направленные отрезки выражаются действительными числами, положительными и отрицательными. Например, запись

$$AB = -3$$

обозначает следующее: 1) длина отрезка AB равна 3, 2) направление отрезка AB противоположно (не совпадает) направлению оси, на которой он лежит.

Теперь символ AB одновременно обозначает геометрическую фигуру (направленный отрезок) и соответствующее ему число. Практика показывает, что это не приводит

[1]) Направление ориентированного отрезка считается от начала к концу.

к недоразумениям. Разрешается даже такая формулировка: «направленный отрезок равен —3».

Если A, B, C — любые три точки, лежащие на оси, то

$$AB + BC = AC. \tag{2.1}$$

Это равенство называется правилом цепи или формулой Шаля. Она имеет глубокий смысл, над которым стоит задуматься. Если бы AB, BC и AC обозначали длины отрезков, то формула (2.1) была бы справедлива лишь при условии, что точка B лежит *между* A и C. Если же мы имеем дело с направленными отрезками, то формула (2.1) справедлива при *любом* расположении точек A, B, C. Поэтому ее можно применять вслепую, не глядя на чертеж. Надо только запомнить расположение букв в этой формуле.

Доказать формулу (2.1) легко, рассмотрев все возможные случаи расположения точки B относительно отрезка AC.

Согласно формуле (2.1) любой отрезок PQ, лежащий на оси, можно разбить любой точкой X, лежащей на той же оси, так что

$$PQ = PX + XQ.$$

Формулу (2.1) можно обобщить

$$AB + BC + CD + \ldots + KL + LM = AM. \tag{2.2}$$

Формула (2.2) называется обобщенным правилом цепи. Ее легко доказать последовательным свертыванием: $AB + BC$ заменяется на AC, затем $AC + CD$ заменяется на AD и т. д.

Ясно, что при перестановке букв в обозначении направленного отрезка изменяется его ориентация, и поэтому он меняет знак (сохраняя абсолютную величину):

$$BA = -AB. \tag{2.3}$$

Формулу (2.3) можно получить и чисто формально, заменив в формуле (2.1) букву C буквой A.

При помощи направленных отрезков можно ввести координаты на оси. Для этого надо выбрать на оси начало координат O и единицу масштаба. Если теперь A — точка на оси, то отношение направленного отрезка OA к единице масштаба e есть координата (или абсцисса) точки A

$$x = \frac{OA}{e}. \tag{2.4}$$

Подчеркнем два важных обстоятельства. Во-первых, единице масштаба e не приписывается знак (т. е. мы всегда считаем ее положительной). Значит, знак координаты x совпадает со знаком направленного отрезка OA. Во-вторых, координата безразмерна, т. е. она — отвлеченное число. На рис. 3 координата точки A равна 3 (со знаком $+$).

Пусть две точки на оси заданы своими координатами: $A\ (x_1)$ и $B\ (x_2)$. Как выразится направленный отрезок AB?

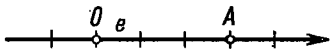

Рис. 3.

Решать этот вопрос, пользуясь чертежом, нежелательно, потому что придется рассматривать много разных случаев (какая из координат больше, какие у них знаки, как расположено начало O относительно отрезка AB). Следующая простая выкладка, пригодная для всех случаев, дает ответ на поставленный вопрос:

$$AB = AO + OB = -OA + OB = x_2 - x_1\ ^{1}).$$

Итак, всегда

$$AB = x_2 - x_1. \tag{2.5}$$

Запомним: *направленный отрезок равен координате конца минус координата начала.*

Наконец, отметим еще одно свойство направленных отрезков. Если $AB = AC$, то точка C совпадает с B. Символически

$$(AB = AC) \Rightarrow (C \equiv B) \tag{2.6}$$

(здесь $\Rightarrow$ — знак следствия, а $\equiv$ — знак тождества).

---

[1]) Здесь и в дальнейшем мы считаем e единичным отрезком, т. е. приписываем ему длину, равную единице.

Глава I

ПРОСТОЕ ОТНОШЕНИЕ

3. Формулировка задачи. Для успешного решения какой-нибудь задачи прежде всего необходимо ее точно сформулировать. Формулировка «разделить отрезок в данном отношении» содержит много неясностей. Какой отрезок — ориентированный или нет? Лежит ли он на оси или на прямой? Что́ понимать под отношением?

На все эти вопросы будет дан ответ, а **пока** рассмотрим направленный отрезок AB и на нем точку C (рис. 4, *а*). Будем также предполагать (тоже **пока**), что все три точки A, B и C различны. Отношением, в котором точка C делит отрезок AB, считается отношение $\frac{AC}{CB}$. Обозначим его греческой буквой λ:

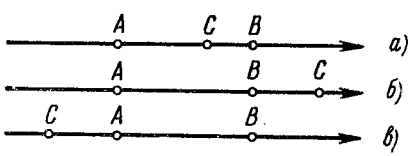

Рис. 4.

$$\lambda = \frac{AC}{CB}. \tag{3.1}$$

В формуле (3.1) надо запомнить порядок букв, так как все три точки играют разную роль, а именно:

A — начало отрезка,
B — конец отрезка,
C — делящая точка.

Отношение, в котором точка делит отрезок, составляется так:

числитель — от начала к делящей точке,
знаменатель — от делящей точки к концу.

Например, на рис. 4, *а* точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = 2$.

Теперь заметим, что данное определение вовсе не требует, чтобы делящая точка лежала внутри отрезка. На рис. 4,*б* точка C лежит вне отрезка AB со стороны конца. Ничто не мешает нам вычислить λ по формуле (3.1). На этом рисунке $AC > 0$, $CB < 0$, $\lambda = -3$. Правда, непривычно говорить, что «точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = -3$». Мы привыкли считать, что слова «точка делит отрезок» означают, что она его разбивает на две

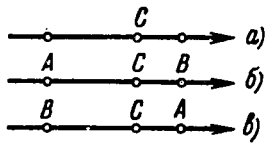

Рис. 5.

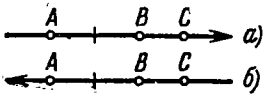

Рис. 6.

части, а на рис. 4,*б* делящая точка лежит вне отрезка. Однако если читатель — будущий математик, то он не должен бояться подобных неудобств. В математике постоянно происходит обобщение понятий и теорем, а терминология при этом сохраняется, так что старые термины и формулировки понимаются в более широком смысле.

Принято говорить, что всякая точка, лежащая внутри отрезка, делит его *внутренним образом*, а точка, лежащая вне,— *внешним образом*. Отношение λ во всех случаях определяется по формуле (3.1). Например, на рис. 4, *в* точка C делит отрезок AB внешним образом в отношении $\lambda = -\frac{1}{3}$.

Итак, мы полностью выяснили, что́ понимать под отношением λ *для направленного отрезка*. Теперь зададим два вопроса:

1) Существенно ли, что отрезок ориентирован?

2) Существенно ли, что прямая, на которой лежит отрезок, ориентирована?

На рис. 5,*а* изображен неориентированный отрезок. В каком отношении его делит точка C? На этот вопрос нельзя ответить. На рис. 5,*б* и 5,*в* тот же отрезок ориентирован по-разному. И что же? На рис. 5,*б* точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = 2$, а на рис. 5,*в* — в отношении $\lambda = \frac{1}{2}$.

Значит, на первый вопрос надо ответить: да. *Задача о делении отрезка в данном отношении не имеет смысла для неориентированного отрезка.*

Чтобы ответить на второй вопрос, всмотримся в рис. 6,*а* и 6,*б*. Они различаются только направлением оси. Ясно, что *если изменить направление оси, на которой лежат точки* A, B, C, *то все направленные отрезки на этой оси только сменят знак, а следовательно, отношение* λ *не изменится.* Например,

на рис. 6,*а* $AC = 3$, $CB = -1$, $\lambda = -3$;
на рис. 6,*б* $AC = -3$, $CB = 1$, $\lambda = -3$.

Итак, на второй вопрос ствечаем: нет. Для определения λ ориентация прямой, на которой лежит отрезок, не нужна. Рис. 7 отличается от рис. 6 только тем, что отрезок AB расположен на неориентированной прямой. Это не мешает нам установить, что $\lambda = -3$.

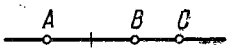

Рис. 7.

На неориентированной прямой нельзя приписать знак отрезкам, но можно приписать знак отношению отрезков [1]). Для определения знака отношения не требуется знать знак каждого отдельного отрезка. Играет роль лишь то, имеют ли эти отрезки одно и то же направление или противоположные направления.

Задача о делении отрезка в данном отношении относится к ориентированным отрезкам, расположенным на неориентированной прямой.

Однако если прямая не ориентирована, то как определить λ? Ведь формула (3.1) в этом случае не годится, так как в этой формуле предполагается, что отрезки снабжены знаком.

Если A, B, C *— три точки на прямой, то отношением, в котором точка* C *делит отрезок* AB, *называется число* λ, *абсолютная величина которого равна отношению длин отрезков* AC *и* CB,

$$|\lambda| = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

и которое положительно (*отрицательно*) *если точка* C *лежит внутри* (*вне*) *отрезка* AB.

Это определение важно тем, что оно показывает возможность определить λ на неориентированной прямой.

[1]) Напоминаем: отрезки ориентированы.

Однако при решении любых задач удобнее поступать иначе: ориентировать прямую. Ведь мы знаем, что значение λ не зависит от того, как мы ее ориентируем. С другой стороны, на ориентированной прямой λ полностью (и по абсолютной величине и по знаку) определяется формулой (3.1). Удобство этого способа состоит в том, что можно пользоваться свойствами направленных отрезков, которые не зависят от частных особенностей чертежа.

Остается еще договориться о случаях, когда точка C совпадает с A или с B. В первом случае в согласии с формулой (3.1) мы будем считать $\lambda = 0$. Во втором случае формула (3.1) теряет смысл (знаменатель правой части обращается в нуль). Принято считать $\lambda = \infty$, но на это следует смотреть только как на стенографическую запись следующего факта: «делящая точка совпадает с концом отрезка». Символ ∞ нельзя рассматривать как число. Ему (не везде в математике, а в данном вопросе) не приписывается знака (не $+\infty$ и не $-\infty$, а просто ∞). Это соглашение имеет основания, которые будут несколько освещены в гл. II.

Ввиду громоздкости обозначения $\frac{AC}{CB}$ для него принят более простой символ (ABC):

$$\lambda = (ABC), \tag{3.2}$$

и более простое название: п р о с т о е о т н о ш е н и е т р е х т о ч е к (на прямой). В символе простого отношения всегда на первом месте ставится начало отрезка, на втором — конец отрезка, на третьем — делящая точка.

Теперь мы полностью выяснили, что́ такое простое отношение λ. Осталось сформулировать задачу о делении отрезка в данном отношении. Вот она:

Дан отрезок AB и дано число λ. Требуется найти точку C, делящую отрезок AB в отношении λ.

П р и м е ч а н и е. Данный отрезок мы всегда будем предполагать невырожденным, т. е. считать, что точки A и B различны; λ может иметь любое действительное значение, т. е. $-\infty < \lambda < \infty$.

4. Решение задачи. Из того, что мы сформулировали некоторую задачу, вовсе не следует, что она имеет решение. Если же имеет, то неизвестно, единственное ли.

Сначала покажем, что ни при каком λ задача не может иметь более одного решения. Допустим, что существуют две точки C и C', делящие отрезок AB в одинаковом

отношении

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AC'}{C'B},$$

или, разбивая отрезки в числителях точкой B,

$$\frac{AB + BC}{CB} = \frac{AB + BC'}{C'B},$$

$$\frac{AB}{CB} - 1 = \frac{AB}{C'B} - 1,$$

$$\frac{AB}{CB} = \frac{AB}{C'B},$$

$$BC = BC',$$

откуда на основании (2.6) точка C' совпадает с C. Значит, если при данном λ задача имеет решение, то это решение единственное.

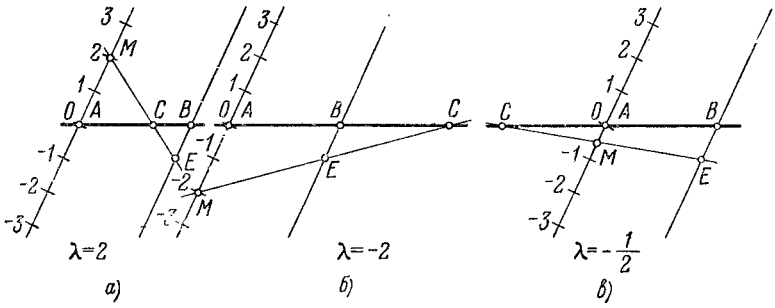

Рис. 8.

Вопрос о том, всегда ли задача имеет решение, удобнее всего выяснить в процессе поиска решения.

Проведем через точки A и B две параллельные прямые (рис. 8). На первой прямой нанесем равномерную шкалу, принимая точку A за начало. На второй прямой отложим одну единицу масштаба (т. е. $BE = AI$) в противоположном направлении. Теперь все готово для решения задачи. Найдем на числовой оси точку M, соответствующую данному значению λ, и соединим ее с E. Точка пересечения ME с AB и есть искомая точка C.

В самом деле, треугольники AMC и BEC подобны. Следовательно,

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BE}}.$$

Внимание: в этой пропорции участвуют длины отрезков, так как в элементарной геометрии, в частности, в теории подобия треугольников рассматриваются отрезки без знака. Учитывая, что $\overline{BE} = 1$, запишем эту пропорцию так:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = |\lambda|.$$

Это рассуждение относится ко всем трем вариантам рис. 8. Теперь остается убедиться, что знак $\frac{AC}{CB}$ и знак λ совпадают. Ясно, что, если $\lambda > 0$, то точка C окажется внутри отрезка, а если $\lambda < 0$, то вне. Следовательно,

$$\frac{AC}{CB} = \lambda.$$

Это построение не приведет к получению точки C только в том случае, если прямые ME и AB окажутся параллельными, а это произойдет при $\lambda = -1$. Значит, при $\lambda = -1$ либо данное построение не позволяет найти решение, либо решения нет. Легко убедиться, что решения нет. В самом деле, что́ значит разделить отрезок AB в отношении $\lambda = -1$? Это значит найти точку C, которая: 1) одинаково удалена от точки A и B (потому, что $|\lambda| = 1$); 2) лежит вне отрезка AB (потому что $\lambda < 0$). Такой точки не существует, потому что всякая точка, лежащая вне отрезка, ближе к одному из его концов, чем к другому.

Заметим, что при $\lambda = 0$ точка C совпадает с A, а при $\lambda = \infty$ — с B.

Задача о делении отрезка в данном отношении имеет решение, и притом единственное, при всяком λ, *кроме* $\lambda = -1$. *При* $\lambda = -1$ *решения не существует.*

Каждому значению λ (кроме $\lambda = -1$) соответствует определенная точка на прямой AB, и обратно, каждой точке на прямой AB соответствует определенное значение λ. Интересно изучить это соответствие, т. е. представить наглядно, как распределены на прямой AB различные значения λ. Это можно сделать геометрически и аналитически.

Геометрический способ основан на построении рис. 8. Проведем через точку E много прямых и перенесем вдоль каждой прямой пометку с прямой $A1$ на прямую AB (рис. 9). Вне отрезка со стороны начала располагаются отрицательные значения, по абсолютной величине мень-

шие единицы, а со стороны конца — отрицательные значения, по абсолютной величине бо́льшие единицы.

Покажем теперь аналитический способ. Введем на прямой AB координаты. Точку A примем за начало, а направление оси для определенности возьмем от A к B (хотя это не обязательно). Тогда точка B будет иметь

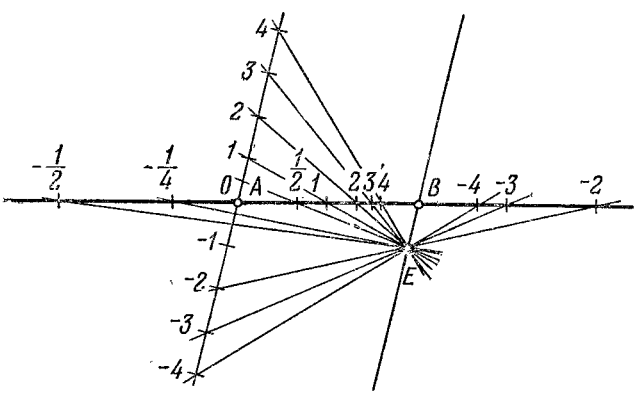

Рис. 9.

координату a ($a > 0$), где a — длина отрезка AB. Возьмем теперь на оси любую точку $C(x)$. Тогда

$$\frac{AC}{CB} = \lambda,$$

или по формуле (2.5)

$$\frac{x-0}{a-x} = \lambda,$$

откуда $x = \dfrac{\lambda a}{1+\lambda}$. Таким образом, имеем две формулы, выражающие λ через x и x через λ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{x}{a-x}, \\ x &= \frac{\lambda a}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Беря на оси разные точки, можно по первой формуле определять λ. Обратно, задавшись значением λ, можно по второй формуле найти x и нанести точку на чертеж. Направление оси не влияет на результат.

5. Механическое истолкование задачи. Поместим в точки A и B массы m_1 и m_2 соответственно и найдем центр тяжести этих двух материальных точек. Он лежит на отрезке AB и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные прилежащим массам, т. е.

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$$

(буквой C обозначен искомый центр тяжести). Значит, задача «разделить отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{3}{2}$» может быть истолкована так: в точку A поместить массу 2, а в точку B массу 3, тогда центр тяжести и есть искомая точка.

Это истолкование имеет следующий недостаток: оно годится только для $\lambda > 0$. Чтобы приспособить его к случаю $\lambda < 0$, пришлось бы ввести отрицательные массы.

6. Инвариантность простого отношения относительно параллельного проектирования. Слово «инвариантность» обозначает неизменность. Заголовок этого пункта выражает следующее свойство:

Если три точки прямой параллельно спроектировать на другую прямую, то их простое отношение не изменится.

Что́ значит «параллельно спроектировать» — ясно из рис. 10. Через точки A, B, C проводятся параллельные

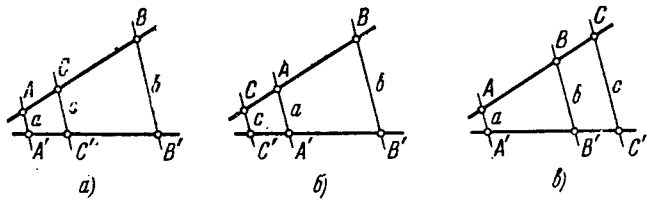

Рис. 10.

прямые a, b, c. Их точки пересечения A', B', C' с прямой, на которую проектируем, называются параллельными проекциями точек A, B, C.

Доказательство. По известной теореме о пропорциональности отрезков, высекаемых параллельными прямыми на сторонах угла имеем

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

или иначе

$$\left|\frac{A'C'}{C'B'}\right| = \left|\frac{AC}{CB}\right|.$$

Остается показать, что простые отношения $\frac{A'C'}{C'B'}$ и $\frac{AC}{CB}$ имеют одинаковые знаки. Но это ясно: если точка C лежит между A и B, то и точка C' лежит между A' и B' (рис. 10,*а*), и оба отношения положительны. Если же точка C лежит вне отрезка AB, то и точка C' лежит вне отрезка $A'B'$ (рис. 10,*б* и 10,*в*), и оба отношения отрицательны. Таким образом, доказано, что

$$\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB},$$

или

$$(A'B'C') = (ABC). \qquad (6.1)$$

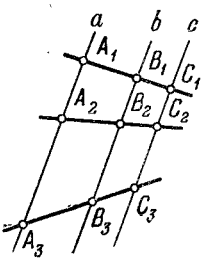

Рис. 11.

На это свойство можно взглянуть с иной точки зрения:

Три параллельные прямые a, b, c высекают на любой прямой (не параллельной им) одно и то же простое отношение.

Так, на рис. 11

$$(A_1B_1C_1) = (A_2B_2C_2) = (A_3B_3C_3) = \ldots$$

Поскольку простое отношение не зависит от секущей прямой, оно принадлежит самой тройке прямых a, b, c. Это позволяет сделать новый шаг. До сих пор мы знали лишь простое отношение трех точек прямой, а теперь мы введем понятие о простом отношении трех параллельных прямых.

Простым отношением упорядоченной тройки параллельных прямых называется простое отношение трех точек, высекаемых этими прямыми на любой секущей прямой.

7. Перестановка элементов в простом отношении. На рис. 12 изображены три точки на прямой. Чему равно их простое отношение? На этот вопрос нельзя ответить, потому что эти точки не упорядочены. Их можно упорядочить по-разному. Поэтому данной неупорядоченной тройке точек соответствует несколько разных значений λ. Сколько?

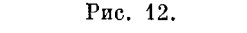
Рис. 12.

Три точки можно упорядочить шестью способами: (ABC), (BAC), (ACB), (CAB), (BCA), (CBA). Ориентируем как-нибудь прямую, на которой расположены точки, и обозначим простое отношение (ABC) через λ:

$$\lambda = (ABC) = \frac{AC}{CB}. \tag{7.1}$$

В дальнейших выкладках используются свойства направленных отрезков (2.1) и (2.3). Каждый раз, когда встретится отрезок AB или BA, мы будем разбивать его точкой C.

Вычислим остальные пять простых отношений:

$$(BAC) = \frac{BC}{CA} = \frac{-CB}{-AC} = \frac{1}{\lambda}.$$

Запомним: *если поменять ролями начало и конец отрезка, то простое отношение заменится на обратное.*

Далее

$$(ACB) = \frac{AB}{BC} = \frac{AC + CB}{-CB} = -\frac{AC}{CB} - 1 = -(1 + \lambda).$$

Следующее простое отношение (CAB) незачем вычислять таким способом, а можно применить только что сформулированное правило о перестановке начала и конца отрезка

$$(CAB) = -\frac{1}{1+\lambda}.$$

Далее

$$(BCA) = \frac{BA}{AC} = \frac{BC + CA}{AC} = \frac{-CB - AC}{AC} = \frac{-1 - \dfrac{AC}{CB}}{\dfrac{AC}{CB}} = -\frac{1+\lambda}{\lambda}.$$

Опять переставляя начало и конец,

$$(CBA) = -\frac{\lambda}{1+\lambda}.$$

Составим сводку полученных результатов. В этой сводке нежелательно связывать точки с определенными буквами, потому что в разных случаях нам могут встретиться другие буквенные обозначения. Важны лишь места, занимаемые *элементами* (может быть, и не точками, а пря-

мыми) в простом отношении. Поэтому заменим буквы A, B, C номерами 1, 2, 3.

$$\left.\begin{aligned} (123) &= \lambda, & (312) &= -\frac{1}{1+\lambda} \\ (213) &= \frac{1}{\lambda}, & (231) &= -\frac{1+\lambda}{\lambda} \\ (132) &= -(1+\lambda), & (321) &= -\frac{\lambda}{1+\lambda}. \end{aligned}\right\} \quad (7.2)$$

Итак, одна и та же неупорядоченная тройка в зависимости от способа упорядочения порождает несколько простых отношений. Например, тройке, изображенной на рис. 12, соответствуют следующие простые отношения: $2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$ и $-\frac{2}{3}$.

Сколько же различных простых отношений соответствуют неупорядоченной тройке? Как видно из сводки (7.2), вообще говоря, шесть. Почему в этой формулировке сказано «вообще говоря»? Потому что значения, приведенные в таблице (7.2), не всегда различны. При особых расположениях точек некоторые из них могут совпадать. Найдем эти случаи. Это очень интересная задача. Сначала кажется, что таких троек очень много, но затем выясняется, что только одна.

Чтобы решить поставленный вопрос, надо брать любые пары значений из таблицы (7.2), приравнивать их и находить λ. Однако заметим, что мы обозначили буквой λ не какое-нибудь определенное, а любое из шести отношений. Поэтому достаточно приравнивать λ остальным выражениям. Тем самым число вариантов сводится к пяти. Договоримся заранее предполагать, что все три точки различны. Вырожденные тройки (с совпавшими элементами) не представляют интереса: ясно, что если две точки совпадают, то их перестановка не изменяет простого отношения. Тем самым мы должны считать непригодными значения $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$.

Теперь рассмотрим пять вариантов:

1) $\lambda = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$. Поскольку значение $\lambda = -1$ невозможно, оставляем только решение $\lambda_1 = 1$.

2) $\lambda = -(1+\lambda)$, откуда $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

3) $\lambda = -\frac{1}{1+\lambda}$, $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$. Мнимые корни.

4) $\lambda = -\frac{1+\lambda}{\lambda}$. То же самое.

5) $\lambda = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$. Отбрасывая непригодное решение $\lambda = 0$, оставляем $\lambda_3 = -2$.

Мы получили три значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -2$. Вспомним теперь, что мы ищем неупорядоченную тройку, которой соответствует не одно, а шесть значений λ. Исходя из каждого найденного значения λ, восстановим всю шестерку, в которую входит это значение.

λ	$\frac{1}{\lambda}$	$-(1+\lambda)$	$-\frac{1}{1+\lambda}$	$-\frac{1+\lambda}{\lambda}$	$-\frac{\lambda}{1+\lambda}$
1	1	-2	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	-2	1	1
-2	$-\frac{1}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	-2

Три строки этой таблицы совпадают (с точностью до порядка). Следовательно, найденные три значения λ следует рассматривать как одно решение. Они соответствуют тройке точек, одна из которых есть середина отрезка между двумя другими.

Неупорядоченной невырожденной тройке вообще говоря соответствует шесть различных значений простого отношения. Единственным исключением служит тройка, у которой средняя точка есть середина отрезка между крайними. Такой тройке соответствуют только три различных значения простого отношения.

Ясно, что в такой тройке перестановка крайних точек незаметна и не может изменить значения простого отношения.

8. Групповое свойство простого отношения. Понятие группы — одно из основных понятий математики. О нем нельзя говорить вскользь или скороговоркой. Поэтому мы расскажем о групповом свойстве простого отношения, не связывая его с общим понятием группы. Пусть читатель этой книжки пока воспримет содержание этого пункта изолированно, как любопытное свойство простого отно-

шения. Впоследствии, ознакомившись с теорией групп [1]), читатель узнает, что это свойство связано с глубокими идеями. Вот еще один пример углубления!

Групповое свойство простого отношения заключается в следующем.

Если в любое из шести выражений

$$\left.\begin{array}{lll} a_1 = \lambda, & a_2 = \dfrac{1}{\lambda}, & a_3 = -(1+\lambda), \\ a_4 = -\dfrac{1}{1+\lambda}, & a_5 = -\dfrac{1+\lambda}{\lambda}, & a_6 = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \end{array}\right\} \quad (8.1)$$

вместо λ *подставить любое из них, то в результате получится опять одно из них.*

Можно взглянуть на это и с такой точки зрения. Все a_i суть функции от λ:

$$a_i = f_i(\lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Подставляя вместо аргумента одну из этих функций, мы получим выражение такого типа:

$$f_i[f_j(\lambda)] \quad (i = 1, 2, \ldots, 6;\ j = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (а)$$

(случай $i = j$ не исключается). Оказывается, что функция (а) — не новая, а одна из тех же шести:

$$f_i[f_j(\lambda)] = f_k(\lambda). \qquad (8.2)$$

Таким образом, рассматриваемая операция (подстановка вместо аргумента λ одной из функций $f_i(\lambda)$) не дает ничего нового, т. е. не выводит нас из исходной шестерки функций.

Как это доказать? Можно перепробовать все 36 комбинаций букв i, j в формуле (8.2). Пусть, например, $i = 3$, $j = 6$. Это значит, что мы исходим из

$$a_3 = -(1+\lambda)$$

и вместо λ подставляем $a_6 = -\dfrac{\lambda}{1+\lambda}$:

$$-(1+a_6) = -\left(1 - \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) = -\frac{1}{1+\lambda} = a_4.$$

Значит,

$$f_3[f_6(\lambda)] = f_4(\lambda).$$

[1]) Это знакомство можно начать с книг: 1) П. С. Александров, Введение в теорию групп, изд. 2-е, М., 1951. 2) И. Гроссман и В. Магнус, Группы и их графы, М., 1971.

Однако такой способ доказательства не удовлетворит пытливого читателя. Если 36 проверок подтвердят наше предположение, то нельзя думать, что налицо 36 случайных совпадений. Должно быть, какое-то простое основание этого факта. Сейчас мы его укажем, и это будет гораздо убедительнее.

Мы обозначили буквой λ *любое* из шести отношений (ABC), (BAC), ... В таблице (7.2) находим, например,

$$(123) = \lambda, \qquad (213) = \frac{1}{\lambda}.$$

Если отвлечься от обозначений, то это значит: замене значения простого отношения обратной величиной соответствует перестановка двух первых элементов. Это применимо к любому из шести отношений (потому что безразлично, какую из трех точек обозначить цифрой 1 и т. д.). Следовательно, если выражение $-\frac{1+\lambda}{\lambda}$ заменить обратным $\left(\text{это значит в } \frac{1}{\lambda} \text{ вместо } \lambda \text{ подставить } -\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)$, то получится простое отношение с переставленными двумя первыми элементами, которое, разумеется, входит в таблицу (7.2), что́ и требовалось доказать.

Вернемся еще раз к формуле (8.2). Мы обнаружили, что при $i = 3$, $j = 6$ получается $k = 4$. Решим эту задачу исчерпывающим образом, т. е. найдем k для любых пар i, j. Сначала вспомним, что́ понимают в арифметике и в алгебре под словом д е й с т в и е [1]). Пусть дано какое-нибудь множество M. *Действием называется закон или операция, который любой упорядоченной паре элементов* (a, b) *множества* M *ставит в соответствие единственный элемент того же* [2]) *множества.*

П р и м е р 1. Пусть M — множество натуральных чисел 1, 2, 3, ... Действие с л о ж е н и я каждой паре чисел ставит в соответствие третье число — их сумму. Знак действия часто ставится между компонентами: $2 + 3 = 5$.

П р и м е р 2. На том же множестве рассмотрим действие *умножения*. Это — *другое* действие. Той же паре (2, 3) оно ставит в соответствие не 5, а 6: $2 \cdot 3 = 6$.

---

[1]) Точнее «бинарная операция», т. е. действие над двумя компонентами. Действие может быть и с одной компонентой, например извлечение квадратного корня.

[2]) Это не обязательно, но мы ограничимся этим случаем.

Оба эти действия обладают свойством коммутативности ($a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$), и поэтому упорядоченность пары компонент (a, b) несущественна. Если же рассмотреть действие $a^b = c$, то в нем компоненты неравноправны.

Рассмотрим теперь множество M, элементами которого служат функции (8.1). На этом множестве определим некоторое действие, которое будем называть «умножением» и обозначать знаком $\odot$ (кавычки и кружок, чтобы не смешивать с настоящим умножением).

«Умножить» a_i на a_j значит подставить в a_i вместо λ выражение a_j. Символически

$$a_i \odot a_j = f_i [f_j(\lambda)] = a_k. \tag{8.3}$$

Выше было показано, что $f_3 [f_6 (\lambda)] = f_4 (\lambda)$. Теперь это можно сформулировать так: a_3 «умножить» на a_6, получится a_4 или $a_3 \odot a_6 = a_4$.

Пусть читатель найдет все 36 «произведений» $a_i \odot a_j$. В следующей таблице приведены ответы.

1-й сомножитель	2-й сомножитель					
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_2	a_2	a_1	a_4	a_3	a_6	a_5
a_3	a_3	a_5	a_1	a_6	a_2	a_4
a_4	a_4	a_6	a_2	a_5	a_1	a_3
a_5	a_5	a_3	a_6	a_1	a_4	a_2
a_6	a_6	a_4	a_5	a_2	a_3	a_1

(8.4)

Таблицу (8.4) можно назвать таблицей «умножения» [1]. Рассмотрим ее внимательно и сделаем некоторые наблюдения.

[1]) В теории групп принято название «квадрат Кэли».

1. «Умножение» не коммутативно. Например, имеем $a_2 \odot a_3 = a_4$, а $a_3 \odot a_2 = a_5$. Поэтому, когда мы говорим «умножить» на a_i, то должны добавлять: «справа» или «слева». Например, a_2 «умножить справа» на a_3 значит: $a_2 \odot a_3 = a_4$, а a_2 «умножить слева» на a_3 значит: $a_3 \odot a_2 = a_5$.

2. Относительно «умножения» элемент a_1 играет ту же роль, что число 1 относительно обыкновенного умножения. Умножение любого числа на единицу не изменяет этого числа:

$$a \cdot 1 = a.$$

Из таблицы (8.4) видно, что «умножение» (и справа и слева) любого элемента на a_1 не изменяет этого элемента:

$$a_i \odot a_1 = a_1 \odot a_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Поэтому элемент a_1 называют «единицей».

3. «Умножение» обладает свойством ассоциативности:

$$(a_i \odot a_j) \odot a_k = a_i \odot (a_j \odot a_k). \tag{8.5}$$

Если, например, *сначала* перемножить $a_2 \odot a_3$, а *потом* домножить (справа) полученный результат на a_4, то получится

$$(a_2 \odot a_3) \odot a_4 = a_4 \odot a_4 = a_5.$$

Если же *сначала* перемножать $a_3 \odot a_4$, то выйдет так:

$$a_2 \odot (a_3 \odot a_4) = a_2 \odot a_6 = a_5.$$

Результат — один и тот же. Можно таким способом проверить все комбинации и убедиться в справедливости закона (8.5).

Закон ассоциативности делает излишним употребление скобок при записи произведения трех и более элементов. Можно писать

$$a_i \odot a_j \odot a_k,$$

подразумевая под этим любую из частей равенства (8.5).

Можно определить «деление». Но довольно! Надо остановиться. Пусть читатель подумает над этим сам.

Множество элементов, на котором определено одно действие, обладающее некоторыми свойствами, которых

мы здесь не перечисляем, называется группой. Элементы (8.1) с действием, определенным формулой (8.3), образуют группу.

Мы заглянули в теорию групп через щелочку. Желаем каждому читателю этой книжки впоследствии войти в нее через широко открытую дверь.

9. Несобственные точки. В этом пункте мы расширим понятие о точке, без чего дальнейшее продвижение было бы неудобным. Неудобства, на которые мы могли бы натолкнуться, будут показаны в п. 10.

Условимся приписывать параллельным прямым общую точку, называемую несобственной [1]). Итак, отныне мы будем говорить, что *две параллельные прямые пересекаются в несобственной точке.* У читателя возникает желание рассмотреть эту точку так же, как и всякую другую. Где она? Однако это не такая же точка, как другие, а *несобственная.* Рассмотреть ее наглядно можно, но не так, как собственные точки. Сейчас мы попытаемся преодолеть естественное сопротивление организма на введение новых понятий, не укладывающихся в привычную наглядность.

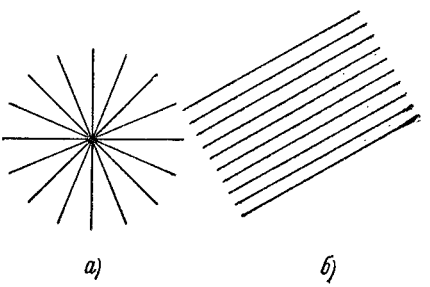

Рис. 13.

Несобственная точка есть то́ общее, что́ принадлежит параллельным прямым. Две параллельные прямые имеют общее *направление.* Значит, введение несобственных точек не есть радикальный переворот, а только скромное переименование: термин «направление прямой» отныне заменяется новым «несобственная точка».

На рис. 13, *а* изображено множество прямых, проходящих через общую точку. Это множество называется центральным пучком, а общая точка — центром пучка. Ясно, что задание центра вполне определяет пучок, и обратно. На рис. 13, *б* изображен параллельный пучок, т. е. множество

[1]) Иногда ее называют бесконечно удаленной. Это название хуже, так как нам никогда не придется иметь дело с расстоянием до нее.

параллельных прямых, принадлежащих одной плоскости. Если вместо точек понимать пучки, то различие между собственными и несобственными точками частично стирается:

собственная точка — это центральный пучок;
несобственная точка — это параллельный пучок.

Предостерегаем читателя от вопроса, где́ находится несобственная точка — справа или слева. Это была бы попытка подходить к новым понятиям при помощи старой интуиции. Чтобы научиться обращаться с несобственными

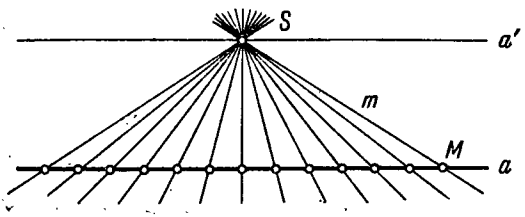

Рис. 14.

точками, надо выработать новую интуицию. На каждой прямой существует единственная несобственная точка, и к ней неприменимы понятия «справа», «слева», «сверху», «снизу» и т. д. На рис. 14 показана прямая a и центральный пучок S. Установим соответствие между точками прямой и прямыми пучка: прямой m соответствует точка M и обратно (см. рисунок). Можно ли сказать, что это соответствие взаимно однозначно, т. е. *каждой точке прямой a соответствует одна прямая пучка S, и обратно, каждой прямой пучка S соответствует одна точка прямой a*? До введения несобственных точек вторая часть этого утверждения была неверна: в пучке S имеется одна *лишняя* прямая a', параллельная a. Ей не соответствует никакая точка прямой a. Однако после введения несобственных точек данное положение стало правильным. Теперь и прямой a' соответствует одна точка прямой a, а именно несобственная. Она ни справа, ни слева. Если прямая m будет поворачиваться вокруг точки S против часовой стрелки, то точка M будет двигаться по прямой a вправо, а если m будет поворачиваться по часовой стрелке, то точка M будет двигаться влево. И в том и в другом

случае наступит момент, когда прямая m совпадет с a'. В этот момент точка M станет несобственной.

Ясно, что в плоскости существует бесконечное множество несобственных точек. Обозначим это множество буквой u. Условимся считать его прямой (несобственной). Это вполне естественно по следующим двум причинам.

Во-первых, каждая собственная прямая имеет одну несобственную точку, т. е. имеет одну общую точку с множеством u. Поэтому естественно считать, что u — прямая.

Во-вторых, возьмем две параллельные плоскости α и α' (рис. 15). Каждому параллельному пучку в плоскости соответствует параллельный пучок того же направления в плоскости α'. Другими словами, каждая несобственная точка плоскости α принадлежит также плоскости α' и обратно. Значит, множество несобственных точек у параллельных плоскостей общее. Это еще один довод за то, чтобы называть упомянутое множество прямой.

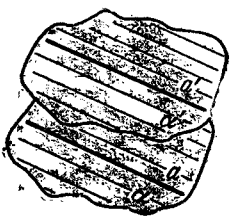

Рис. 15.

Итак, *на плоскости существует единственная несобственная прямая. Всякая собственная прямая имеет единственную несобственную точку, а несобственная прямая состоит только из несобственных точек.*

Если на некоторой прямой будут обнаружены две несобственные точки, то это — несобственная прямая.

Множество всех несобственных точек пространства называется несобственной плоскостью. Нам не придется иметь с ней дело, так как эта книжка посвящена геометрии на плоскости.

Мы расширили множество точек плоскости, введя новые точки. Можно ли считать, что эти новые точки вошли как равноправные со старыми, т. е. что они ничем не отличаются от собственных? Нет, нельзя. Несобственные точки только *в некоторых отношениях* равноправны с собственными. Укажем точно, в каких именно.

В позиционных вопросах, т. е. в вопросах, касающихся взаимной принадлежности точек и прямых, между собственными и несобственными точками нет никакой разницы. В самом деле, все позиционные свойства (на плоскости) вытекают из двух аксиом.

1. *Две различные точки определяют единственную прямую* (подразумевается: проходящую через них).

2. *Две различные прямые определяют единственную точку* (подразумевается: принадлежащую им).

Первая аксиома иллюстрируется рис. 16. Каждая точка задается пучком. Провести прямую через две точки — значит найти общую прямую двух пучков. На рис. 16, *а*

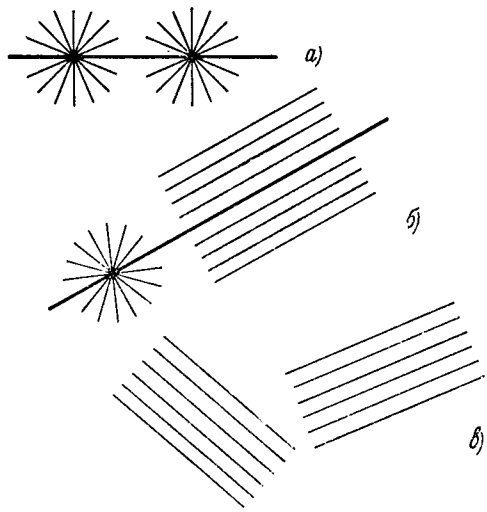

Рис. 16.

обе точки собственные. Это — «старый» случай, хорошо знакомый. На рис. 16, *б* одна точка собственная, а другая несобственная. Ясно, что и в этом случае они определяют единственную прямую. На рис. 16, *в* обе точки несобственные. И в этом случае существует единственная прямая, содержащая их: несобственная.

Для проверки второй аксиомы рассмотрим три случая:

1) Две прямые — собственные непараллельные. Они пересекаются в собственной точке.

2) Две прямые — собственные параллельные. Они имеют одну общую точку: несобственную.

3) Одна прямая собственная, другая несобственная. Их (единственной) общей точкой служит несобственная точка первой прямой.

В метрических вопросах, т. е. в вопросах, связанных с измерением отрезков и углов, несобственные точки не-

равноправны с собственными. Нельзя говорить о расстоянии между двумя несобственными точками (но можно говорить об угле!). Из собственной точки на собственную прямую можно опустить единственный перпендикуляр, а из несобственной — либо ни одного, либо бесконечное множество и т. д. и т. д.

Аксиома о параллельных также не распространяется на случай, когда прямая или точка вне ее несобственные.

Теперь вернемся к теме этой книжки. Если две точки A и B — собственные, а U — несобственная точка прямой AB, то чему равно простое отношение (ABU)? Разумеется, это дело договоренности, но надо договориться наиболее естественным способом.

Если все три точки собственные, то

$$\lambda = (ABC) = \frac{AC}{CB} = \frac{AB + BC}{CB} = \frac{AB}{CB} - 1;$$

если точка C будет *стремиться к* U (это значит: неограниченно удаляться по прямой), то $\lim\limits_{C \to U} \frac{AB}{CB} = 0$. Поэтому, если C совпадает с U, естественно приписать λ предельное значение:

$$\lambda = (ABU) = -1.$$

До сих пор значение $\lambda = -1$ считалось невозможным. Теперь оно как раз пригодилось для несобственной точки. Отныне можно разделить отрезок AB *в любом* отношении.

Рассмотрим еще случаи, когда начало или конец отрезка — несобственная точка. Если $A \to U$, то в выражении $\lambda = \frac{AC}{CB}$ числитель бесконечно возрастает, а знаменатель постоянен, если же $B \to U$, то наоборот. Поэтому естественно считать

$$\left.\begin{aligned} (UBC) &= \infty, \\ (AUC) &= 0, \\ (ABU) &= -1. \end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

Не все свойства простого отношения, о которой говорилось выше, справедливы и для несобственных элементов.

10. Разделение точек на прямой. Прямая содержит бесконечное множество точек. Мы добавили к ним еще одну — несобственную. Неужели это столь важно?

О, да! Добавление несобственной точки существенно меняет свойства прямой. В частности, понятие «между» после введения несобственной точки теряет смысл.

До сих пор мы считали, что из трех точек прямой всегда две крайние, а одна промежуточная, т. е. лежащая *между* крайними. Говорят также, что одна точка разделяет две другие. Если в точке A находится волк, а в точке B — овца (рис. 17), то можно обеспечить безопасность овцы, поставив в точке C непреодолимую преграду (предполагается, что волк может передвигаться только по прямой). В данном случае преграда разделяет волка и овцу). Эти свойства прямой не имеют места на окружности. Из трех точек окружности нет определенной

Рис. 17.

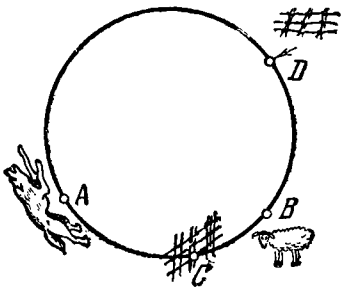

Рис. 18.

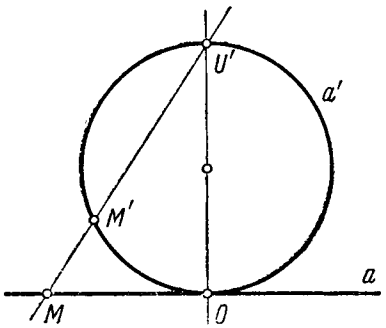

Рис. 19.

промежуточной точки. Если требуется разделить волка и овцу, то одной преграды недостаточно. Преграда в точке C (рис. 18) не помешает волку достичь овцы, двигаясь по часовой стрелке. Нужны две преграды — в точках C и D, и тогда овца может быть спокойной.

Итак, *на окружности одна точка не может разделять пару точек, а две — могут.* И еще: *четверка точек на окружности единственным образом распадается на две взаимно разделяющиеся пары.*

После введения несобственной точки эта разница между прямой и окружностью исчезает. Отныне прямая стала замкнутой линией.

На рис. 19 показано соответствие между точками окружности и точками прямой, называемое стереографической проекцией. Прямая касается окружности a' в точке O. Диаметрально противоположная точка U' служит центром проекций. Каждой точке M прямой соответствует точка M' окружности, и обратно — точке M' соответствует точка M. До введения несобственной точки это отображение не было взаимно однозначным: на окружности есть лишняя точка U'. Теперь же точке U' соответствует несобственная точка U прямой a.

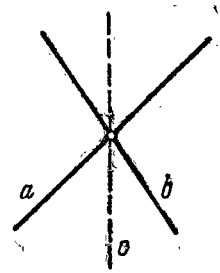

Рис. 20.

В центральном пучке прямых тоже одна прямая не может разделять пару других. Пусть a и b — две прямые пучка (рис. 20). Какова бы ни была третья прямая c, всегда можно вращением совместить a с b так, чтобы в процессе вращения a не проходила положение c. Однако две прямые могут разделить a и b. И еще: *четверка прямых центрального пучка единственным образом распадается на две взаимно разделяющиеся пары.*

Рассмотрим еще раз рис. 14. Легко убедиться в справедливости следующего положения.

Пусть четверка точек прямой проектируется из некоторого центра четверкой прямых. Тогда разделяющиеся пары точек проектируются разделяющимися парами прямых.

Таким образом, взаимная разделенность двух пар точек сохраняется при центральном проектировании. Это верно и при проектировании с одной прямой на другую. Свойство же тройки точек прямой распадаться на пару крайних точек и одну промежуточную (только на прямой без несобственной точки!) сохраняется лишь при параллельном проектировании (см. рис. 11), а при центральном нет. На рис. 21 мы видим три точки A, B, C на прямой a, причем точка C лежит *между* A и B. Эти точки из центра S спроектированы на прямую a', при этом точка C' *не* лежит между A' и B'.

Пусть читатель задержит внимание на рис. 21 и задумается над вопросом: служит ли отрезок $A'B'$ проекцией отрезка AB? Этот вопрос неясен — ведь на прямой a существуют два отрезка AB — внутренний и

внешний, т. е. содержащий несобственную точку. Из рис. 21 ясно, что всякая внутренняя точка отрезка AB (например, C) проектируется во внешнюю точку отрезка $A'B'$. Если же мы спроектируем несобственную точку U прямой (проектирующая прямая параллельна a), то получим точку U' внутри отрезка $A'B'$. Значит, внутренний отрезок $A'B'$ есть проекция внешнего отрезка AB.

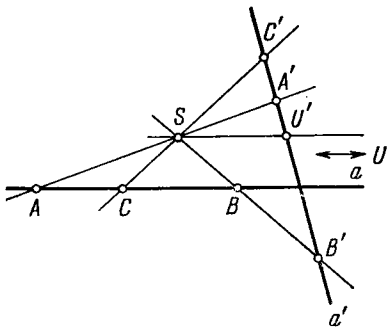

Рис. 21.

Эти абстрактные рассуждения имеют практическое значение для волка A (рис. 17). После введения несобственной точки преграда C не помешает ему добраться до овцы в точке B, только ему придется двигаться через несобственную точку. Вообразим, что все три точки проектируются из точки S (рис. 22). Прямая a вращается около точки S по часовой стрелке. Волк должен бежать влево так, чтобы в каждый данный момент находиться в точке пересечения прямой a с m. Когда a станет параллельна m, волк окажется в несобственной точке.

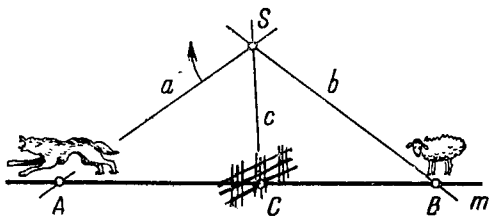

Рис. 22.

При дальнейшем вращении прямой a волк появится справа и доберется до овцы.

Правда, волк должен быть отличным бегуном. Если прямая a вращается вокруг S равномерно, то при приближении a к положению, параллельному m, скорость волка должна бесконечно возрастать. Это не должно нас удивлять. Скорость — метрическое понятие, связанное с измерением расстояний, а читатель был предупрежден, что

по отношению к несобственным точкам не следует ставить метрических задач.

11. Теорема Чевы. Медианы треугольника проходят через одну точку. Эта теорема необратима: из того, что прямые AL, BM и CN проходят через одну точку (рис. 23), не следует, что они медианы. Необратимость теоремы означает, что в ее условии содержатся лишние требования: чтобы сделать заключение, что прямые AL, BM и CN проходят через одну точку, не обязательно требовать, чтобы они были медианами (или высотами, или биссектрисами) а можно ограничиться *более слабым* требованием. Интересно найти *минимальное* условие, т. е. такое, при несоблюдении которого прямые AL, BM и CN не могут иметь общей точки. Тогда теорема будет обратима. Это условие будет достаточно и необходимо.

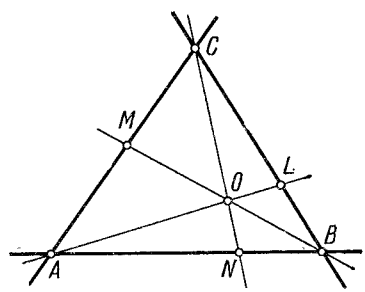

Рис. 23.

Это минимальное условие нашел итальянский математик Джованни Чева (1648—1734). Прежде, чем его сформулировать, уточним некоторые термины.

Под «стороной треугольника» мы будем понимать не отрезок, а всю бесконечную прямую. Пусть дан треугольник ABC. Возьмем на каждой стороне по одной точке (не совпадающей ни с какой вершиной):

на стороне AB возьмем точку N,
на стороне BC возьмем точку L,
на стороне CA возьмем точку M.

Чтобы указать отношения, в которых эти точки делят стороны треугольника, надо упорядочить его вершины. Условимся обходить треугольник в любом из двух направлений: либо ABC, либо ACB. В первом случае пары вершин будут упорядочены так:

$$AB,\ BC,\ CA,$$

а во втором случае все наоборот:

$$BA,\ AC,\ CB.$$

Выберем для определенности первую ориентацию и обозначим

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= (BCL),\\ \mu &= (CAM),\\ \nu &= (ABN).\end{aligned}\right\} \qquad (11.1)$$

Теорема Чевы гласит:

Если прямые AL, BM и CN проходят через одну точку, то $\lambda\mu\nu = 1$.

Примечание. Точки A, B, C собственные, а L, M, N и O любые.

Доказательство. Предположим сначала, что все семь точек собственные. Точка O может лежать и

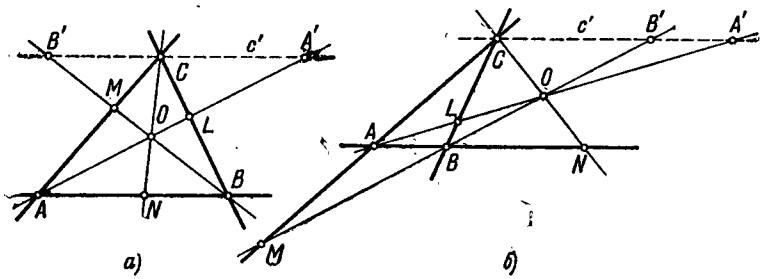

Рис. 24.

внутри треугольника и вне. Для наглядности даем два чертежа рис. 24, *а* и *б*. Нижеследующее рассуждение относится к любому из них.

Через C проводим прямую $c' \parallel AB$. Обозначим A' и B' точки пересечения соответственно AL и BM с c'. В дальнейшем мы пользуемся пропорциями, вытекающими из подобия треугольников, и, следовательно, *рассматриваем все отрезки и их отношения как положительные.*

Из подобия треугольников $OA'C$ и OAN имеем

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OC}}.$$

Из подобия треугольников $OB'C$ и OBN получаем

$$\frac{\overline{NB}}{\overline{CB'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OC}}.$$

Приравниваем левые части:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{CB'}},$$

или, переставляя члены пропорции,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CB'}}. \qquad \text{(а)}$$

Из подобия треугольников ABL и $A'CL$ имеем

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA'}}. \qquad \text{(б)}$$

Из подобия треугольников ABM и $CB'M$ получаем

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{AB}}. \qquad \text{(в)}$$

Перемножая (а), (б) и (в), получим

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1. \qquad \text{(г)}$$

Остается выяснить, что́б произойдет, если в левой части (г) ввести отношения (11.1) со знаком. Если точка O лежит внутри треугольника, как на рис. 24, *а*, то каждая из точек L, M и N лежит *между* двумя вершинами треугольника, и, следовательно, все три отношения (11.1) положительны. Значит, в этом случае вместо (г) можно написать

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1. \qquad (11.2)$$

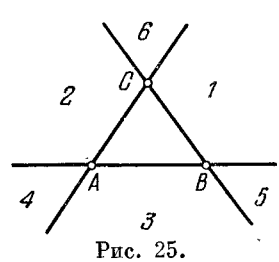

Рис. 25.

Если точка O находится вне треугольника (но не на стороне), то она лежит либо внутри угла треугольника (области *1*, *2*, *3* на рис. 25), либо внутри вертикального угла (области *4*, *5*, *6* на рис. 25). Пусть, например, точка O лежит внутри угла A или вертикального ему угла. В таком случае прямая AO пересечет сторону BC в точке L, лежащей *между* B и C, а прямые BO и CO пересекут стороны CA и AB *вне* отрезков CA и AB. Таким образом, если

точка O лежит вне треугольника ABC, то среди отношений (11.1) будет одно положительное и два отрицательных. Значит, произведение $\lambda\mu\nu$ в любом случае положительно, и соотношение (11.2) доказано.

Пусть теперь одна из делящих точек, например L,— несобственная, т. е. $AL \parallel BC$ (рис. 26). Из подобия треугольников AON и BCN следует

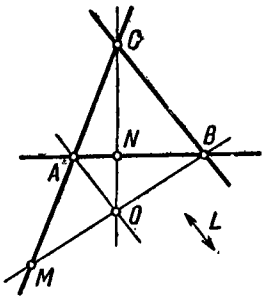

Рис. 26.

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BC}}.$$

Из подобия треугольников OMA и BMC следует

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{CM}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{BC}}.$$

Приравниваем левые части:

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{CM}}. \qquad (д)$$

Поскольку точка O должна лежать на прямой AL, параллельной BC, она находится в области, заштрихованной на рис. 27. Легко убедиться, что в таком случае либо точка N лежит между A и B, а точка M — вне отрезка AC, либо наоборот, т. е. отношения $\frac{AN}{NB}$ и $\frac{MA}{CM}$ имеют разные знаки. Поэтому (д) можно переписать так:

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{MA}{CM},$$

иначе

$$\frac{AN}{NB} = -\frac{1}{\frac{CM}{MA}},$$

т.е.

$$\nu = -\frac{1}{\mu}.$$

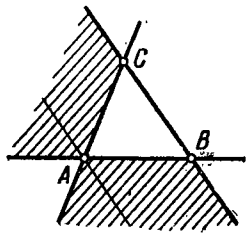

Рис. 27.

Значит, $\mu\nu = -1$. Точка L — несобственная, т. е. $\lambda = -1$. Таким образом,

$$\lambda\mu\nu = 1.$$

Рассмотрим далее случай, когда две делящие точки, например L и M, несобственные. Тогда фигура $ACBO$ —

параллелограмм (рис. 28), и точка N есть середина стороны AB. В этом случае $\lambda = -1$ $\mu = -1$, $\nu = 1$ и, следовательно, $\lambda\mu\nu = 1$.

Все три точки L, M, N не могут быть несобственными (если дано, что прямые AL, BM и CN имеют общую точку). Возможен еще случай, когда точка O несобственная, т. е. прямые AL, BM и CN параллельны (рис. 29). Легко убедиться, что в этом случае одно отношение положительно,

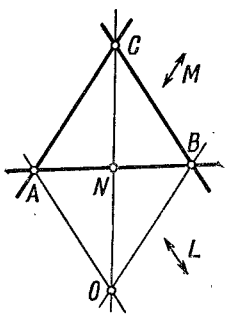

Рис. 28.

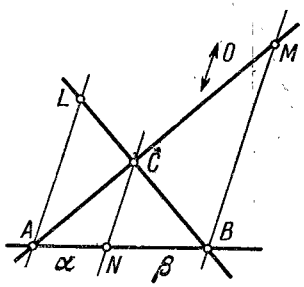

Рис. 29.

а два отрицательны. На рис. 29 $\lambda < 0$, $\mu < 0$, $\nu > 0$. Обозначим отрезки AN и NB соответственно α и β. Тогда

$$\nu = \frac{AN}{NB} = \frac{\alpha}{\beta},$$

$$\lambda = \frac{BL}{LC} = -\frac{\alpha+\beta}{\sim},$$

$$\mu = \frac{CM}{MA} = -\frac{\beta}{\alpha+\beta}.$$

Перемножая, находим

$$\lambda\mu\nu = 1.$$

Теперь теорема Чевы доказана полностью.

Обратная теорема. *Если на каждой стороне треугольника взять одну точку (не совпадающую с вершиной) так, что произведение отношений, в которых эти точки делят стороны, равно единице, то прямые, соединяющие вершины треугольника с точками, взятыми на противоположных сторонах, проходят через одну точку.*

Короче: *если* $\lambda\mu\nu = 1$, *то* AL, BM *и* CN *проходят через одну точку.*

Доказательство. Допустим, что прямые AL, BM и CN не проходят через одну точку (рис. 30). Обозначим буквой O точку пересечения AL и BM, проведем прямую CO и обозначим через N' точку пересечения CO с AB. Обозначим простое отношение (ABN') через ν'. Имеем:

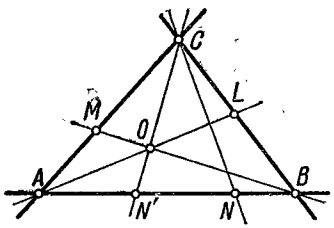

Рис. 30.

$\lambda\mu\nu = 1$ (по условию),

$\lambda\mu\nu' = 1$ (по теореме Чевы).

Отсюда $\nu = \nu'$. Это противоречит предположению, что точки N и N' различны. Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем называть теоремой Чевы любую из этих двух теорем. Их можно объединить в следующей формулировке.

Для того чтобы прямые AL, BM и CN проходили через одну точку, необходимо и достаточно условие $\lambda\mu\nu = 1$.

Если бы мы не ввели несобственных точек, то обе теоремы не были бы столь простыми. Первую из них пришлось бы формулировать так. Если прямые AL, BM и CN проходят через одну точку, то возможны три случая:

либо произведение трех отношений λ, μ, ν равно единице,

либо одна прямая параллельна противоположной стороне [1]), а две другие высекают на противоположных сторонах отношения, произведение которых равно минус единице,

либо две прямые параллельны противоположным сторонам, а третья делит противоположную сторону (отрезок) пополам.

Случай, изображенный на рис. 29, невозможен, раз дано, что прямые проходят через одну точку.

Вторая теорема формулировалась бы так. Если $\lambda\mu\nu = 1$, то прямые AL, BM и CN либо проходят через

---

[1]) Если $AL \parallel BC$, то AL есть обозначение прямой, а точки L в этом случае не существует.

одну точку, либо параллельны. Случаи типа $AL \parallel BC$ исключаются, раз дано существование точек L, M, N.

Введение несобственных точек позволяет объединить эти разнообразные (казалось бы!) случаи в единой формулировке. Стремление к объединению случаев, единых по форме (хотя и различных по содержанию) — характерная черта математики. Математик должен уметь замечать это единство.

Известные из школьного курса теоремы о пересечении медиан, биссектрис и высот суть частные случаи второй теоремы. Покажем это.

Если AL, BM и CN — медианы, то $\lambda = \mu = \nu = 1$. Следовательно, $\lambda\mu\nu = 1$.

Если AL, BM и CN—биссектрисы, то $\lambda = \frac{c}{b}, \mu = \frac{a}{c}$, $\nu = \frac{b}{a}$. Следовательно, $\lambda\mu\nu = 1$.

Если AL, BM и CN — высоты, то $\lambda = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$, $\mu = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}$, $\nu = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}$. Следовательно, $\lambda\mu\nu = 1$. Эта теорема имеет один особый случай: когда треугольник ABC прямоугольный. В этом случае теорема Чевы неприменима, так как она требует, чтобы точки L, M и N не совпадали с вершинами. Разумеется, теорема о том, что высоты треугольника проходят через одну точку, верна и в этом случае, но при ссылке на теорему Чевы случай прямоугольного треугольника должен быть рассмотрен отдельно.

Историческое замечание. Автор этой теоремы Джованни Чева пришел к ней из механических соображений. Пусть в вершинах A, B, C помещены массы соответственно m_1, m_2, m_3. Пусть L, M, N—соответственно центры тяжести пар (m_2, m_3), (m_3, m_1), (m_1, m_2). Центр тяжести двух материальных точек находится на отрезке между этими точками и делит его в отношении, обратном отношению масс, т. е.

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ делит отрезок } BC \text{ в отношении } \lambda = \dfrac{BL}{LC} = \dfrac{m_3}{m_2}, \\ M \text{ делит отрезок } CA \text{ в отношении } \mu = \dfrac{CM}{MA} = \dfrac{m_1}{m_3}, \\ N \text{ делит отрезок } AB \text{ в отношении } \nu = \dfrac{AN}{NB} = \dfrac{m_2}{m_1}. \end{array}\right\} \quad (11.3)$$

Ясно, что $\lambda\mu\nu = 1$.

Из статики известно, что центр тяжести трех точек лежит на отрезке, соединяющем одну из этих точек с центром тяжести двух других [1]). Следовательно, центр тяжести трех масс m_1, m_2, m_3 принадлежит каждому из отрезков AL, BM, CN, т. е. эти три отрезка имеют общую точку.

Легко доказать, что если $\lambda\mu\nu = 1$, то можно подобрать массы m_1, m_2, m_3, удовлетворяющие условиям (11.3).

Используя понятие о центре тяжести, можно добыть много интересного в геометрии [2]). Этот метод можно распространить и на отрицательные значения λ, μ, ν.

12. Теорема Менелая [3]). При сохранении прежних обозначений имеют место следующие две теоремы.

1. *Если точки L, M и N лежат на одной прямой, то* $\lambda\mu\nu = -1$.

2. *Если* $\lambda\mu\nu = -1$, *то точки L, M и N лежат на одной прямой.*

Напомним, что вершины треугольника ABC всегда предполагаются собственными, а точки L, M и N — любыми.

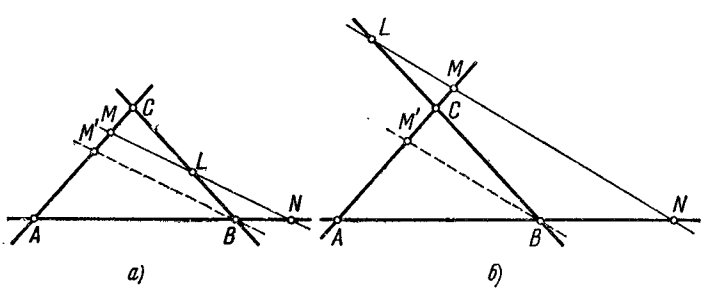

Рис. 31.

Прямая, пересекающая стороны треугольника, называется (по отношению к этому треугольнику) т р а н с в е р с а л ь ю. Трансверсаль, если она не проходит ни через одну из вершин треугольника, либо пересекает две

[1]) Это относится к любому множеству материальных точек, разбитому на два подмножества.

[2]) См. М. Б. Б а л к, Геометрические приложения понятия о центре тяжести, М., 1959. («Библиотека математического кружка», вып. 9.)

[3]) Греческий геометр конца I века нашей эры.

стороны внутри, а одну вне (рис. 31, *а*), либо все три вне (рис. 31, *б*). Точки пересечения трансверсали со сторонами BC, CA и AB обозначены соответственно L, M и N.

Докажем первую теорему. Проведем через вершины треугольника прямые, параллельные трансверсали (на рис. 31 проведена лишь одна из них — BM'). Если трансверсаль не параллельна какой-нибудь стороне треугольника, то это — три *различные* прямые. Будем все интересующие нас отношения заменять отношениями отрезков на какой-нибудь одной стороне треугольника, например на CA. Обозначив через M' точку пересечения параллели, проходящей через B, со стороной CA, имеем (внимание: все пропорции — с учетом знаков)

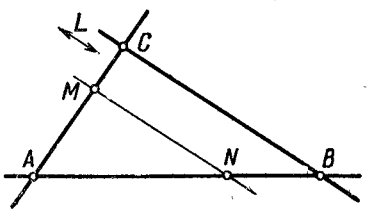

Рис. 32.

$$\left.\begin{aligned} \frac{BL}{LC} &= \frac{M'M}{MC}, \\ \frac{AN}{NB} &= \frac{AM}{MM'}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(а)}$$

Вычисляем произведение $\lambda\mu\nu$, используя (а)

$$\lambda\mu\nu = \frac{BL}{LC}\cdot\frac{CM}{MA}\cdot\frac{AN}{NB} = \frac{M'M\cdot CM\cdot AM}{MC\cdot MA\cdot MM'} = \frac{M'M}{MM'}\cdot\frac{CM}{MC}\cdot\frac{AM}{MA} =$$

$$= (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) = -1.$$

Если трансверсаль параллельна одной из сторон (рис. 32), то дело обстоит еще проще:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} = \frac{MA}{CM} = \frac{1}{\frac{CM}{MA}},$$

т. е. $\nu = \frac{1}{\mu}$, или $\mu\nu = 1$. Точка L в этом случае несобственная, т. е. $\lambda = -1$. Следовательно, $\lambda\mu\nu = -1$.

Наконец, остается рассмотреть случай, когда трансверсаль — несобственная прямая. В этом случае все три точки L, M, N — несобственные, $\lambda = \mu = \nu = -1$ и $\lambda\mu\nu = -1$. Первая теорема доказана полностью.

Докажем вторую теорему. Дано, что $\lambda\mu\nu = -1$. Допустим, что точки L, M и N не лежат на одной прямой. Примем прямую LM за трансверсаль и обозначим через N' точку пересечения LM с AB и через ν' простое отношение (ABN'). Имеем

$$\lambda\mu\nu = -1 \text{ (по условию)},$$
$$\lambda\mu\nu' = -1 \text{ (по предыдущей теореме)}.$$

Отсюда $\nu = \nu'$. Это противоречит предположению, что точки N и N' различны. Теорема доказана.

Глава II

СЛОЖНОЕ ОТНОШЕНИЕ

13. Понятие о сложном отношении. Возьмем на прямой отрезок AB и две делящие точки C и D (они должны быть упорядочены: например, C считается первой, а D — второй). Тогда возникает два простых отношения:

точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = (ABC)$,
точка D делит отрезок AB в отношении $\mu = (ABD)$.

Отношение этих двух отношений называется сложным отношением четырех точек и обозначается символом $(ABCD)$:

$$w = (ABCD) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{(ABC)}{(ABD)}. \tag{13.1}$$

Расшифровывая смысл простого отношения, можно получить непосредственное определение сложного отношения:

$$w = (ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC \cdot DB}{CB \cdot AD}, \tag{13.2}$$

или, обозначая точки цифрами,

$$(1234) = \frac{13}{32} : \frac{14}{42} = \frac{13 \cdot 42}{32 \cdot 14} \tag{13.3}$$

(разумеется, «13» обозначает направленный отрезок от точки 1 до точки 3 при каком-нибудь выборе направления на прямой).

Подчеркнем, что в символе $(ABCD)$ каждая точка играет особую роль:

$\begin{cases} A \text{ — начало отрезка,} \\ B \text{ — конец отрезка,} \end{cases}$

$\begin{cases} C \text{ — первая делящая точка,} \\ D \text{ — вторая делящая точка.} \end{cases}$

Их целесообразно объединять в пары, как показано фигурными скобками. В п. 15 выяснится, что эти пары равноправны, т. е. можно считать C и D началом и концом отрезка, а A и B — первой и второй делящими точками.

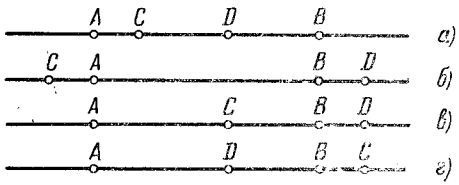

Рис. 33.

Почти всегда мы будем предполагать, что все четыре точки различны. Делящие точки могут быть расположены относительно отрезка AB четырьмя способами (рис. 33):

а) обе внутри,

б) обе вне,

в) первая внутри, вторая вне,

г) первая вне, вторая внутри.

Исследуем знак сложного отношения в этих случаях:

а) $\lambda > 0,\ \mu > 0;\ w > 0,$

б) $\lambda < 0,\ \mu < 0;\ w > 0,$

в) $\lambda > 0,\ \mu < 0;\ w < 0,$

г) $\lambda < 0,\ \mu > 0;\ w < 0.$

Итак, сложное отношение положительно, если обе делящие точки расположены «одинаково» относительно отрезка, и отрицательно, если они расположены различно; как было объяснено в п. 10, это можно сформулировать так:

Если пары не разделяют одна другую, то сложное отношение положительно, а если разделяют, то отрицательно.

Интересно выяснить, чему равно сложное отношение, если какие-нибудь две точки совпадают. Ограничимся случаями, когда четвертая точка совпадает с одной из трех других. Заменяя в формуле (13.2) букву D поочередно буквами A, B и C, найдем

$$\left.\begin{aligned}(ABCA) &= \infty,\\ (ABCB) &= 0,\\ (ABCC) &= 1.\end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

14. Инвариантность сложного отношения относительно центрального проектирования. Центральное проектирование отличается от параллельного (рис. 10 на стр. 16) тем, что проектирующие прямые не параллельны, а проходят через одну точку (собственную), называемую ц е н т р о м п р о е к ц и й. При параллельном проектировании с одной прямой на другую длины отрезков изменяются, но их отношение инвариантно. При центральном проектировании изменяются не только длины, но и отношения. Например, на рис. 34 точка C есть середина отрезка AB, а C' — не середина отрезка $A'B'$. Может изменяться даже знак отношения. Например $(ABC) > 0$ (см. рис. 21), а при проектировании из S на прямую a' получается $(A'B'C') < 0$. Несмотря на это, *отношение двух отношений инвариантно.*

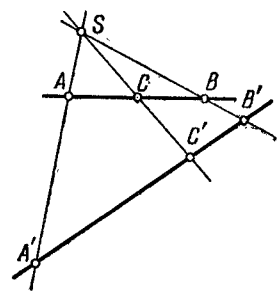

Рис. 34.

Если четыре точки прямой спроектировать на другую прямую, то их сложное отношение не изменится[1]).

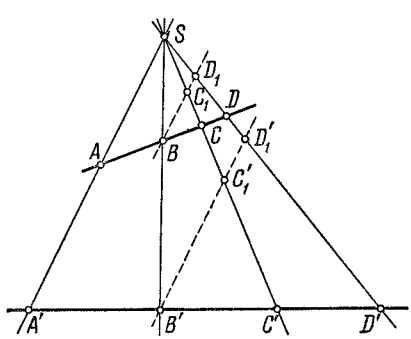

Рис. 35.

Не подумайте, что здесь опечатка: пропущено слово «центрально». Эта теорема справедлива для любого проектирования — и центрального и параллельного. Для параллельного проектирования она тривиальна: раз инвариантны отдельные простые отношения, то инвариантно и их отношение.

[1]) По-немецки werfen — бросать, der Wurf — бросок. Немецкий геометр К. Г. Х. Штаудт (1798—1867) называл этим словом сложное отношение на том основании, что оно не изменяется при «перебрасывании» четверки точек с одной прямой на другую. Поэтому сложное отношение часто обозначают буквой w. Термин «вурф» (вместо «сложное отношение») употребляется и в русском языке в научной литературе по геометрии.

Доказательство. Через две соответственные точки, например B и B', проведем прямые, параллельные какой-нибудь проектирующей прямой, например SA, и отметим точки пересечения этих прямых с двумя остальными проектирующими прямыми (рис. 35). Имеем:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{C_1B}},$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{D_1B}},$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{D_1B}}{\overline{C_1B}}. \qquad \text{(а)}$$

Аналогично получается

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{D_1'B'}}{\overline{C_1'B'}}. \qquad \text{(б)}$$

Правые части (а) и (б) равны между собой (в силу подобия треугольников SBD_1 и $SB'D_1'$). Следовательно, равны и левые части

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{C'B'}} : \frac{\overline{A'D'}}{\overline{D'B'}}.$$

Учитывая, что оба сложных отношения имеют одинаковые знаки, можно написать

$$\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{A'C'}{C'B'} : \frac{A'D'}{D'B'},$$

или

$$(ABCD) = (A'B'C'D'), \qquad (14.1)$$

что и требовалось доказать.

На это свойство можно взглянуть с иной точки зрения:

Четыре прямые a, b, c, d центрального пучка высекают на любой прямой (не проходящей через центр пучка) одно и то же сложное отношение.

Поскольку сложное отношение не зависит от секущей прямой, оно принадлежит самой четверке прямых a, b, c, d. Это позволяет ввести понятие о сложном отношении четырех прямых центрального пучка.

Сложным отношением упорядоченной четверки прямых центрального пучка называется сложное отношение

четырех точек, высекаемых этими прямыми на любой секущей прямой (разумеется, не проходящей через центр пучка).

Сложное отношение четырех прямых обозначается символом $(abcd)$.

Сложное отношение четырех прямых может быть выражено через углы, образованные этими прямыми, т. е. без использования какой-нибудь секущей. Предлагаем читателю доказать следующую формулу:

$$(abcd) = \frac{\sin(a, c)}{\sin(c, b)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(d, b)}. \qquad (14.2)$$

В этой книжке она не будет использоваться.

15. Перестановка элементов в сложном отношении. Изучая в п. 7 перестановки элементов простого отношения, мы непосредственно нашли значения простого отношения для всех шести способов, которыми можно упорядочить три элемента. Для четырех элементов таких способов существует 24, и находить для каждого значение сложного отношения было бы утомительно. Поэтому мы докажем четыре общих правила. Напомним, что четверка точек $ABCD$ состоит их двух пар: AB и CD.

П р а в и л о 1. *Сложное отношение не изменяется при перестановке пар между собой.*

В самом деле, по формуле (13.3)

$$(CDAB) = \frac{CA \cdot BD}{AD \cdot CB}$$

По формуле (13.2) видно, что это совпадает с $(ABCD)$:

$$(CDAB) = (ABCD).$$

П р а в и л о 2. *Сложное отношение не изменяется при одновременной перестановке элементов в каждой паре.*

По формуле (13.3)

$$(BADC) = \frac{BD \cdot CA}{DA \cdot BC} = (ABCD).$$

Ясно, что сложное отношение не изменится, если произвести последовательно обе перестановки. Порядок, в котором они производятся, оказывается, безразличен: и в том и в другом случае мы, отправляясь от $(ABCD)$, придем к $(DCBA)$ (элементы записаны в обратном порядке):

$$(DCBA) = (ABCD).$$

Итак

$$w = (ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA). \quad (15.1)$$

Правила 1 и 2 вынуждают нас изменить названия ролей элементов, введенные в п. 12. Нельзя различать «начало и конец отрезка» и «делящие точки», поскольку эти пары равноправны. Отныне мы будем говорить, что сложное отношение $(ABCD)$ образовано *двумя парами* AB и CD, не приписывая им различных названий. Эти пары, согласно правилу 2, следует считать *неупорядоченными*. Порядок элементов в каждой паре безразличен, но *существует соответствие между элементами этих пар*: в сложном отношении $(ABCD)$ элементу A первой пары соответствует элемент C второй пары, а элементу B соответствует элемент D. Это значит, что если первая пара берется в порядке AB, то вторая должна быть CD, а если первая BA, то вторая DC.

Правило 3. *При перестановке элементов только в одной паре значение сложного отношения заменяется на обратное.*

В самом деле:

$$(BACD) = \frac{BC \cdot DA}{CA \cdot BD} = \frac{1}{w}.$$

Используя формулы (15.1), можно записать

$$\frac{1}{w} = (BACD) = (CDBA) = (ABDC) = (DCAB).$$

Правило 4. *При перестановке несоответственных элементов из разных пар значение сложного отношения заменяется его дополнением до единицы.*

В сложном отношении $(ABCD)$ переставим элементы B и C:

$$(ACBD) = \frac{AB \cdot DC}{BC \cdot AD}.$$

При сравнении этого выражения с (13.2) мы обнаруживаем в числителе отрезки, которых в (13.2) нет. Для преодоления этого затруднения разобьем отрезок AB точкой C, а отрезок DC — точкой B:

$$(ACBD) = \frac{-(AC + CB)(DB + BC)}{CB \cdot AD} = \\ = -\frac{AC \cdot DB + AC \cdot BC + CB \cdot DB + CB \cdot BC}{CB \cdot AD}.$$

Во втором члене числителя переставим буквы в обозначениях обоих отрезков, после чего вынесем за скобку CB из последних трех членов:

$$(ACBD) = -\frac{AC\cdot DB + CB\,(DB + BC + CA)}{CB\cdot AD} =$$
$$= -\frac{AC\cdot DB + CB\cdot DA}{CB\cdot AD} = -\frac{AC\cdot DB}{CB\cdot AD} + 1 = 1 - w.$$

Из четырех элементов можно образовать 24 перестановки. Наши четыре правила позволяют без дальнейших выкладок определить значения соответствующих сложных отношений:

$$1 - w = (ACBD) = (BDAC) = (CADB) = (DBCA).$$

Применим правило 3:

$$\frac{1}{1-w} = (CABD) = (BDCA) = (ACDB) = (DBAC).$$

Применим правило 4 к $\frac{1}{w}$:

$$\frac{w-1}{w} = (BCAD) = (ADBC) = (CBDA) = (DACB).$$

К последним сложным отношениям применим правило 3:

$$\frac{w}{w-1} = (CBAD) = (ADCB) = (BCDA) = (DABC).$$

Мы исчерпали все 24 перестановки из четырех элементов. Дадим сводку полученных результатов, заменяя буквенные обозначения элементов цифровыми:

$$\left.\begin{aligned}
w &= (1234) = (3412) = (2143) = (4321),\\
\frac{1}{w} &= (2134) = (3421) = (1243) = (4312),\\
1 - w &= (1324) = (2413) = (3142) = (4231),\\
\frac{1}{1-w} &= (3124) = (2431) = (1342) = (4213),\\
\frac{w-1}{w} &= (2314) = (1423) = (3241) = (4132),\\
\frac{w}{w-1} &= (3214) = (1432) = (2341) = (4123).
\end{aligned}\right\} \quad (15.2)$$

Обратим внимание на одно существенное отличие этого результата от результата п. 7 см. таблицу (7.2). Из трех точек прямой можно образовать шесть перестановок, и *всем им, вообще говоря, соответствуют различные простые отношения.* Из четырех точек прямой можно образовать 24 перестановки, но *им, вообще говоря, соответствует только шесть различных сложных отношений* [1]). Множество перестановок распадается на шесть четверок с равными сложными отношениями.

16. Гармонические четверки. Существуют ли особые расположения четырех точек на прямой, которым соответствует меньше шести значений сложного отношения? Чтобы ответить на этот вопрос, надо найти значения w, при которых некоторые левые части формул (15.2) совпадают.

З а м е ч а н и е 1. Достаточно приравнивать одну из левых частей, например w, всем остальным. Причина этого — та же, что и в п. 7.

З а м е ч а н и е 2. Мы ищем четверку точек, не фиксируя их ролей (т. е. все точки равноправны и могут быть не обозначены ни буквами, ни цифрами и никаким другим способом). Такая четверка характеризуется не одним значением сложного отношения, а шестеркой значений.

З а м е ч а н и е 3. Мы предполагаем, что все четыре точки различны, т. е. мы ищем настоящую четверку, а не тройку. При совпадении двух точек задача тривиальна, так как заранее ясно, что перестановка совпавших точек ничего не меняет.

Приступим к выполнению намеченного плана.

1) $w = \dfrac{1}{w}$, $w^2 = 1$, $w = \pm 1$.

Значение $w = 1$ отбрасываем, потому что оно соответствует вырожденной четверке (см. формулы (13.4)). Удерживаем значение $w_1 = -1$.

2) $w = 1 - w$, $w_2 = \dfrac{1}{2}$.

3) $w = \dfrac{1}{1-w}$, $w^2 - w + 1 = 0$. Мнимые корни.

4) $w = \dfrac{w-1}{w}$, $w^2 - w + 1 = 0$. То же самое.

---

[1]) А при некотором особом расположении точек — еще меньше (см. п. 16).

5) $w = \frac{w}{w-1}$. Значение $w = 0$ соответствует вырожденной четверке. Удерживаем значение $w_3 = 2$.

Для каждого из найденных значений w составляем шестерку соответствующих значений:

w	$\frac{1}{w}$	$1-w$	$\frac{1}{1-w}$	$\frac{w-1}{w}$	$\frac{w}{w-1}$
-1	-1	2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	2	-1	-1
2	$\frac{1}{2}$	-1	-1	$\frac{1}{2}$	2

Все строки содержат одни и те же числа. Значит, найденные три значения w следует рассматривать как одно решение: они соответствуют одной и той же четверке точек, по-разному упорядоченной. Такая четверка называется гармонической (ниже мы сформулируем определение гармонической четверки более непосредственно).

Как выглядит гармоническая четверка? Любую четверку точек $ABCD$ на прямой можно разбить на две пары тремя способами: 1) AB и CD, 2) AC и BD, 3) AD и BC. При любом расположении точек один из способов дает разделенные пары, а два других — неразделенные [1]). Разобьем гармоническую четверку на две разделенные пары. Такому разбиению соответствует значение $w = -1$. Вспомним, что $w = \frac{\lambda}{\mu}$. Значит, $\lambda = -\mu$. Теперь ясно, как изобразить гармоническую четверку. Возьмем какой-нибудь отрезок AB и внутри него точку C, делящую его в каком-нибудь отношении λ, а вне его — точку D, делящую его В ТАКОМ ЖЕ (по абсолютной величине) отношении.

Пример. На рис. 36 (для удобства показан масштаб) точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = 3$, а точка

[1]) Вот алгебраический эквивалент этого утверждения: из шести чисел w, $\frac{1}{w}$, $1-w$, $\frac{1}{1-w}$, $\frac{w-1}{w}$, $\frac{w}{w-1}$ — четыре положительных и два отрицательных.

D делит тот же отрезок в отношении $\mu = -3$. Четверка $ABCD$ на рис. 36 гармоническая.

Укажем несколько свойств гармонических четверок. Обоснование этих свойств предоставляем читателю.

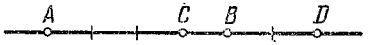

Рис. 36.

1. В гармонической четверке, как и во всякой другой, пары равноправны. Это значит, что можно принять за концы отрезка C и D, тогда точки A и B делят его внутренним и внешним образом в одном и том же (по абсолютной величине) отношении. Например, на рис. 36:

точка A делит отрезок CD в отношении $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$,

точка B делит отрезок CD в отношении $\mu_1 = \frac{1}{2}$.

Однако гармоническая четверка отличается от всякой другой тем, что в ней нет соответствия между точками одной и другой пары, т. е. нельзя считать, что точке A соответствует C. В самом деле, при перестановке элементов в одной паре сложное отношение $w = -1$ заменится обратным, т. е. не изменится. Например, на рис. 36:

точка C делит отрезок BA в отношении $\lambda_3 = \frac{1}{3}$,

точка D делит отрезок BA в отношении $\mu_3 = -\frac{1}{3}$.

Гармоническая четверка состоит их двух разделенных пар. Каждая пара неупорядоченная. Пары равноправны. Точки одной пары называются гармонически сопряженными относительно другой пары.

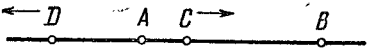

Рис. 37.

2. Для наглядности: если C — внутри отрезка, очень близко к A, то D — вне, тоже очень близко к A. Если C движется направо, то D сначала движется налево (рис. 37). Когда C окажется в середине, то D — несобственная ($\lambda = 1$, $\mu = -1$). К этому стоит отнестись особенно внимательно:

Середине отрезка гармонически сопряжена несобственная точка.

Когда C окажется правее середины, то D появится с правой стороны и будет двигаться навстречу C. Точки C и D будут с разных сторон подходить к точке B.

Покажем еще, как выглядят гармонические четверки прямых. Чтобы получить гармоническую четверку прямых, надо спроектировать из какой-нибудь точки S гармоническую четверку точек. Возьмем любой треугольник ABS (рис. 38) и на его основании AB отметим гармоническую четверку: 1) вершины A и B, 2) середину стороны C и несобственную точку D. Проектируя эту четверку из вершины S, мы придем к следующему заключению.

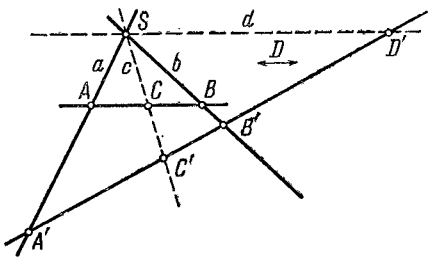

Рис. 38.

В каждой вершине треугольника имеется следующая гармоническая четверка: 1) *две стороны треугольника*, 2) *медиана и прямая, параллельная основанию.*

Это положение позволяет легко начертить гармоническую четверку прямых. Пересекая ее различными прямыми, можно получить разнообразные гармонические четверки точек: см., например, четверку $A'B'C'D'$ на рис. 38.

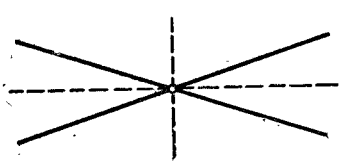
Рис. 39.

Можно указать еще один простой способ получения гармонических четверок прямых:

Две пересекающиеся прямые и две их биссектрисы образуют гармоническую четверку (рис. 39).

17. Построение четвертой точки по сложному отношению. В п. 4 решалась задача: даны две точки A, B и дано простое отношение $\lambda = (ABC)$, найти третью точку C. Естественно поставить аналогичную задачу для сложного отношения: *имея три точки из четверки $ABCD$ на прямой и зная сложное отношение $w = (ABCD)$, найти недостающую четвертую точку.*

Сначала решим вспомогательную задачу.

Даны три прямых центрального пучка a, b, c и даны три точки прямой A_0, B_0, C_0 (рис. 40). Провести прямую, на которой прямые a, b, c высекают тройку точек A, B, C, конгруэнтную A_0, B_0, C_0.

Удобнее начинать построение с точек A_0, B_0, C_0 и пристраивать к ним углы между прямыми a, b, c. Точка S_0 должна лежать на дуге $A_0S_0B_0$, вмещающей угол (a, b) (рис. 41). Такие дуги — две, для определенности возьмем одну из них. Одновременно точка S_0 должна лежать на дуге $B_0S_0C_0$, вмещающей угол (b, c) (возьмем эту дугу по ту же сторону от прямой A_0B_0, что и дугу $A_0S_0B_0$). Точка S_0 определится как вторая (кроме B_0) точка пересечения двух окружностей. Случай касания

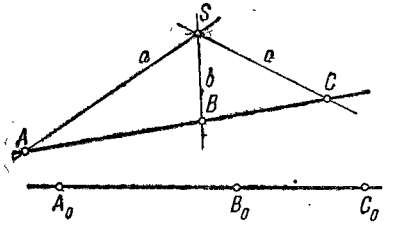

Рис. 40.

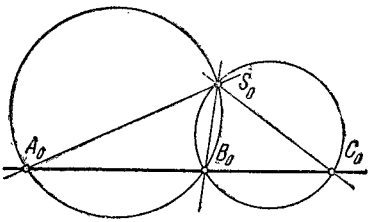

Рис. 41.

двух окружностей не может иметь места, потому что условие касания $(a, b) + (b, c) = 180°$. Теперь следует вернуться к рис. 40 и отложить на прямых a, b, c от точки S отрезки $SA = S_0A_0$, $SB = S_0B_0$, $SC = S_0C_0$, расположенные так же, как на рис. 41. Прямая ABC — искомая. Решений — два, вторая прямая симметрична ABC относительно точки S.

Если одна из точек, например C, несобственная, то задача решается еще проще: следует пересечь тройку a, b, c любой прямой, параллельной c, и затем подобно изменить чертеж.

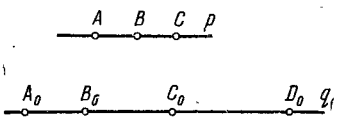

Рис. 42.

Переходим к основной задаче. На прямой p даны три точки A, B, C (рис. 42), на прямой q — четыре точки A_0, B_0, C_0, D_0. Задание этой четверки и есть графическое задание сложного отношения $w = (A_0B_0C_0D_0)$. Требуется найти точку D, образующую с тройкой ABC такое же сложное отношение.

Р е ш е н и е. Из произвольной точки S проектируем данные точки A, B, C. Полученную тройку прямых $a = SA$, $b = SB$, $c = SC$ пересечем прямой так, чтобы на

ней получилась тройка точек $A_0'B_0'C_0'$ (рис. 43), конгруэнтная $A_0B_0C_0$. Строим точку D_0' (четверка $A_0'B_0'C_0'D_0'$ конгруэнтна $A_0B_0C_0D_0$). Соединяем D_0' с S. Точка пересечения $D_0'S$ с p — искомая. Единственность решения несомненна.

Рассмотрим теперь частный и притом наиболее интересный случай, когда четверка — гармоническая. Дана тройка точек на прямой, и требуется дополнить ее до гармонической четверки. Упорядочивать данную тройку незачем, а нужно только указать, какие две составляют пару. Пусть даны три точки ABC, причем известно, что, например, A и B составляют пару, а C — одна точка из другой пары. Требуется найти точку D из условия $(ABCD) = -1$. Эту задачу короче можно сформулировать так:

Найти точку D, гармонически сопряженную с C относительно A и B.

Эту задачу можно решить изложенным выше способом, а также многими более простыми. Вот два из них, основанные на свойствах гармонических пучков (рис.38 и 39).

1. Проектируем из произвольной точки S данные три точки ABC (рис. 44). Теперь надо провести через точку C прямую, отрезок которой внутри угла ASB делился

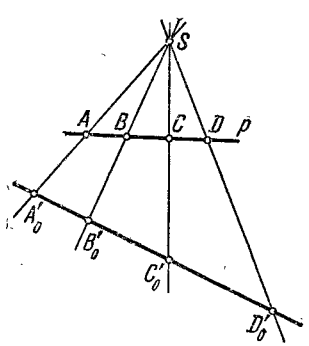

Рис. 43.

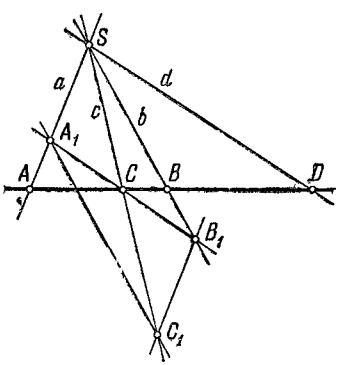

Рис. 44.

бы в точке C пополам. Для этого откладываем $CC_1 = SC$ и проводим $C_1A_1 \parallel BS$ и $C_1B_1 \parallel AS$. Фигура $SA_1C_1B_1$ — параллелограмм. Его диагонали в точке пересечения делятся пополам. Значит, SC — медиана треуголь-

ника A_1B_1S. Остается провести через S прямую, параллельную A_1B_1. Она высечет на AB искомую точку D.

2. Проведем через точки A и B какую-нибудь окружность (рис. 45). Найдем середину C_1 дуги AB (все равно какой). Проведем прямую C_1C, и найдем точку S ее пересечения с окружностью. Теперь прямая $c \equiv SC$ — биссектриса угла (a, b). Остается провести биссектрису d другого (смежного) угла, и она высечет на AB искомую точку D.

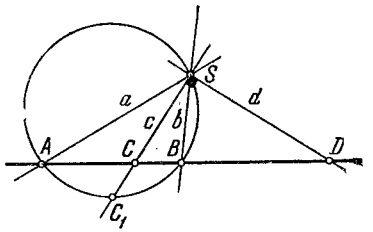

Рис. 45.

Эти способы кустарны и требуют кропотливого исследования возможных частных случаев. Не будем заниматься этим, а покажем гораздо лучший способ. Он не зависит от расположения элементов и от наличия среди данных точек несобственной. Кроме того, он осуществляется только при помощи линейки.

18. Теорема о полном четырехвершиннике. Полным четырехвершинником называется *плоская* фигура, образованная следующими элементами: 1) четыре точки общего положения (это значит: никакие три из них не лежат на одной прямой), 2) шесть прямых, соединяющих эти точки попарно [1]). Четыре точки называются в е р ш и н а м и четырехвершинника, а шесть прямых — с т о р о н а м и.

Название «четырехвершинник» введено, чтобы не использовать слова «четырехугольник», которое может вызывать привычные ассоциации. Четырехвершинник — не часть плоскости, у него нет внутренности.

Полный четырехвершинник изображен на рис. 46. Его вершины отмечены кружочками и обозначены буквами A, B, C, D, но это не значит, что они упорядочены. Вершины полного четырехвершинника равноправны, у него нет «соседних» или «противоположных» вершин.

Стороны полного четырехвершинника, кроме вершин, пересекаются еще в трех точках. Эти точки называются

[1]) Простым четырехвершинником называется *упорядоченная* четверка точек и *четыре* прямые, соединяющие их *в последовательном порядке*, т. е. 1 с 2, 2 с 3, 3 с 4 и 4 с 1.

диагональными точками. На рис. 46 они отмечены квадратиками и обозначены P, Q, R.

Рассмотрим прямую, соединяющую две диагональные точки, например PQ. В этих точках пересекаются по две стороны четырехвершинника. У четырехвершинника остаются еще две стороны. Они пересекают прямую PQ (или QR или RP) в двух точках. Все такие точки обозначены на рис. 46 треугольничками. Оказывается, что два «квадратика» и два «треугольничка» образуют гармоническую четверку.

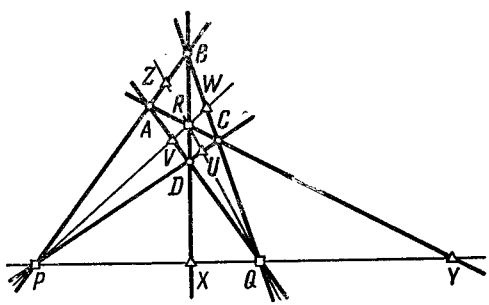

Рис. 46.

Теорема о полном четырехвершиннике. *Пара диагональных точек*[1]) *полного четырехвершинника гармонически делится точками пересечения своей прямой с двумя оставшимися сторонами четырехвершинника.*

Доказательство. Спроектируем четверку $PQXY$ из точки A на прямую BD. При этом точки P, Q, X, Y перейдут соответственно в B, D, X, R. Сложное отношение при центральном проектировании не изменяется

$$w = (PQXY) = (BDXR). \qquad \text{(а)}$$

Спроектируем четверку $(BDXR)$ из точки C обратно на прямую PQ. Она перейдет в четверку $QPXY$:

$$(BDXR) = (QPXY). \qquad \text{(б)}$$

Из (а) и (б) следует

$$w = (PQXY) = (QPXY). \qquad (18.1)$$

[1]) Любая.

Если $(PQXY) = w$, то $(QPXY) = \frac{1}{w}$ (см. (15.2)). Значит, $w = \frac{1}{w}$, откуда $w = \pm 1$. Но w не может равняться единице, потому что все точки P, Q, X, Y различны. Поэтому $w = (PQXY) = -1$, т. е. $PQXY$ — гармоническая четверка, что и требовалось доказать.

Это рассуждение применимо и к аналогичным четверкам $QRZU$ и $RPVW$. Кроме того, в процессе рассуждения было обнаружено, что четверка $BDRX$ гармоническая. Это относится и к аналогичным четверкам $ABPZ$, $ACRY$, $ADQV$, $BCQW$ и $CDPU$.

В доказательстве ничто не изменится, если некоторые точки окажутся несобственными.

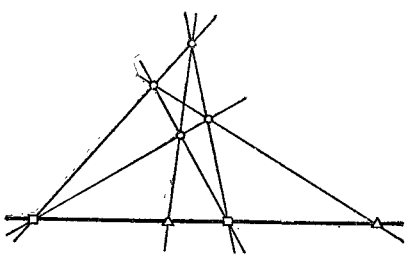

Рис. 47.

Доказанная теорема позволяет находить четвертую гармоническую, «пристраивая» к данной тройке полный четырехвершинник. Этапы построения показаны на рис. 47:

1) Через один «квадратик» проводятся две прямые. 2) Проводится прямая через «треугольничек». В пересечении с первыми двумя она определяет две вершины четырехвершинника («кружочки»). 3) «Кружочки» соединяются со вторым «квадратиком», после чего определяются еще два «кружочка». 4) Проводится последняя сторона (соединяются последние два «кружочка»), которая высекает на данной прямой второй «треугольничек».

Упражнение. Используя теорему о полном четырехвершиннике, докажите, что прямая, соединяющая точку пересечения боковых сторон трапеции и точку пересечения диагоналей, делит параллельные стороны трапеции пополам. Сравните с элементарным доказательством.

19. Групповое свойство сложного отношения. По тем же причинам, что и в п. 8, выражения, стоящие в левых частях формул (15.2), обладают групповым свойством: при подстановке в любое из них вместо w любого другого получится одно из них.

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= w, & a_2 &= \frac{1}{w}, & a_3 &= 1 - w, \\ a_4 &= \frac{1}{1-w}, & a_5 &= \frac{w-1}{w}, & a_6 &= \frac{w}{w-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (19.1)$$

Определим «умножение», как в п. 8: «умножить» a_i на a_j — *значит подставить в* a_i *вместо* w a_j. Например,

$$a_3 \odot a_4 = 1 - \frac{1}{1-w} = \frac{w}{w-1} = a_6.$$

Проделывая эти выкладки для всевозможных пар, получим таблицу «умножения» («квадрат Кэли»). Пусть читатель составит ее самостоятельно. Вероятно, он будет удивлен, обнаружив, что эта таблица совпадает с таблицей (8.4).

Группы (8.1) и (19.1) с геометрической точки зрения — различные. Одна составлена из простых отношений, а другая из сложных. Если же отвлечься от конкретного смысла элементов, а рассматривать только их взаимоотношения при «умножении», то разницы нет. Это напоминает, что с точки зрения абстрактной арифметики нет разницы между равенствами «2 яблока + 3 яблока = 5 яблок» и «2 карандаша + 3 карандаша = 5 карандашей», хотя яблоко и карандаш не одно и то же. Арифметика учит, что $2 + 3 = 5$, отвлекаясь от конкретной природы складываемых предметов. Точно так же специалист по теории групп считает, что группа простых отношений и группа сложных отношений это — одна и та же группа. Эта группа имеет еще много других конкретных воплощений (например, группа подстановок из трех элементов — см. упоминавшиеся на стр. 21 книги П. С. Александрова и И. Гроссмана и В. Магнуса).

ЗАДАЧИ

Итак, книжка окончена. Если читатель заинтересовался темой, пусть решит задачи. Некоторые из них значительно труднее, чем материал, изложенный в книжке.

1. Дан отрезок AB. На прямой AB найти пару точек CD, гармонически делящую AB, причем а) $\overline{CD} = \frac{3}{4}\overline{AB}$, б) $\overline{CD} = k\cdot\overline{AB}$ $(k > 0)$ ($\overline{AB}$ — длина отрезка AB).

Задачи на «деление». Что́ значит «разделить b на a»? Это значит решить уравнение $ax = b$. Поскольку в группе (8.4) «умножение» некоммутативно, естественно определить два разных «деления», а именно: «разделить слева» b на a — значит решить уравнение $a \odot x = b$, «разделить справа» b на a — значит решить уравнение $y \odot a = b$ (здесь a, b и x и y обозначают элементы группы, a и b — данные, x и y — неизвестные).

2. «Разделить слева» a_5 на a_3.

3. «Разделить справа» a_5 на a_3.

4. Доказать, что «деление» (левое или правое) a_i на a_j всегда (т. е. при любых элементах a_i и a_j) возможно и однозначно.

Элемент группы a_i называется циклическим, если существует натуральное число m такое, что $a_i^m = a_1$ (степень определяется как «произведение» m сомножителей $a_i \odot a_i \odot \ldots \odot a_i$, a_1 — единичный элемент). Если при этом $a_i^n \neq a_1$ при $n = 1, 2, \ldots, m-1$ (т. е. m есть *наименьший* показатель, при котором $a_i^m = a_1$), то m называется порядком циклического элемента a_i.

5. Доказать, что все элементы группы (8.4) циклические и найти их порядки.

6. Найти а) $a_2^3 \odot a_4^2 \odot a_5$, б) $a_3^{25} \odot a_6^3$.

7. Связь между теоремами Чевы и Менелая. На каждой стороне треугольника ABC (сторона — бесконечная прямая) взяты две точки, гармонически разделяющие вершины треугольника: на стороне BC — точки L и L', на CA — M и M', на AB — N и N'. Доказать: а) Если прямые AL, BM и CN проходят через одну точку U, то точки L', M' и N' лежат на одной прямой u (прямая u называется гармонической полярой точки U относительно треугольника ABC). б) Обратно: если

точки L', M' и N' лежат на одной прямой u, то прямые AL, BM и CN проходят через одну точку U (точка U называется гармоническим полюсом прямой u относительно треугольника ABC).

В задачах № 8—10 рассматривается треугольник ABC с точками L, M и N на его сторонах, причем прямые AL, BM и CN могут не проходить через одну точку. Тогда они образуют треугольник $A'B'C'$ (рис. 48). Вершины треугольника $A'B'C'$ проектируются на противоположные стороны парами точек LL', MM' и NN'. Простые отношения, в которых точки L, M и N делят стороны треугольника ABC, по-прежнему обозначаются через λ, μ и ν, а аналогичные отношения для точек L', M' и N'—через λ', μ' и ν'.

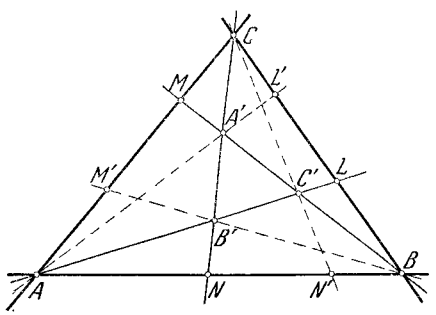

Рис. 48.

8. Доказать (теорема Н. А. Извольского, 1929 г.) $(BCLL') = (CAMM') = (ABNN') = \lambda\mu\nu$. Вывести отсюда теорему Чевы.

9. Доказать (теорема Рауза, 1896 г.), что отношение площадей треугольников $A'B'C'$ и ABC выражается так:

$$\frac{S'}{S} = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)}.$$

Вывести отсюда теорему Чевы.

10. Доказать, что отношение площадей треугольников LMN и ABC выражается так:

$$\frac{S_0}{S} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}.$$

Вывести отсюда теорему Менелая.

11. Доказать следующую теорему, которую можно назвать теоремой Чевы в трехмерном пространстве.

Дан произвольный тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$. На каждом ребре A_iA_j (ребро — бесконечная прямая) взята дополнительная точка A_{ij}, не совпадающая ни с одной из точек A_i и A_j. Если в треугольнике $A_iA_jA_k$ прямые A_iA_{jk}, A_jA_{ik} и A_kA_{ij} проходят через одну точку, то говорят, что в этом треугольнике имеет место явление Чевы, а эту точку называют точкой Чевы и обозначают A_{ijk}.

Теорема. Если в трех гранях тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ имеет место явление Чевы, то: 1) оно имеет место и в четвертой грани, 2) семь прямых A_0A_{123}, A_1A_{023}, A_2A_{013}, A_3A_{012}, $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ и $A_{03}A_{12}$ проходят через одну точку (эту точку естественно обозначить A_{0123} и назвать точкой Чевы тетраэдра).

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. Воспользоваться второй формулой (4.1) (стр. 15). Задача имеет два решения. а) $\lambda_C = -\lambda_D = 3$ или $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{1}{3}$; б) $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{\sqrt{1+k^2}+1}{k}$ или $\lambda_C = -\lambda_D = \frac{\sqrt{1+k^2}-1}{k}$. **2.** a_2. **3.** a_6. **4.** Возможность «деления слева» вытекает из того, что в каждой строке таблицы (8.4) встречаются все элементы группы, а однозначность — из того, что каждый элемент встречается только один раз. Возможность и однозначность «деления справа» вытекают из аналогичных свойств столбцов. **5.** Элемент a_1 — первого порядка, a_2, a_3 и a_6 — второго, a_4 и a_5 — третьего. **6.** Решая эту задачу, надо использовать результат предыдущей. Например, зная, что a_3 — циклический элемент второго порядка, можно в выражении a_3^{25} отбросить двойки в показателе: $a_3^{25} = a_3^1 = a_3$. а) a_3; б) a_4. **7.** Если AL, BM и CN проходят через одну точку, то $\lambda\mu\nu = 1$. Но $\lambda' = -\lambda$, $\mu' = -\mu$, $\nu' = -\nu$. Если $\lambda\mu\nu = 1$, то $\lambda'\mu'\nu' = -1$ и, следовательно, точки L', M' и N' лежат на одной прямой. Аналогично доказывается и обратная теорема. **8.** Четверку точек $BCLL'$ проектируем из A на прямую CN, а затем полученную четверку из B на CA. Эти четверки имеют равные сложные отношения $(BCLL') = (NCB'A') = (ACM'M)$. В последнем сложном отношении переставим элементы в каждой паре (правило второе п. 15):

$$(BCLL') = (CAMM').$$

Аналогично доказывается, что третье сложное отношение равно каждому из первых двух:

$$(BCLL') = (CAMM') = (ABNN').$$

Теперь заметим, что прямые AL', BM и CN проходят через точку A'. Значит по теореме Чевы

$$\frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

или

$$\lambda'\mu\nu = 1, \quad \lambda' = \frac{1}{\mu\nu}.$$

Вычислим сложное отношение $(BCLL')$

$$(BCLL') = \frac{BL}{LC} : \frac{BL'}{L'C} = \lambda : \lambda' = \lambda : \frac{1}{\mu\nu} = \lambda\mu\nu .$$

Если прямые AL, BM и CN проходят через одну точку, то точка L' совпадает с L и, следовательно, $\lambda\mu\nu = (BCLL') = (BCLL) = 1$ (формулы (13.4)). 9. Эта теорема легко доказывается аналитически. Читателю, который еще не начал изучать аналитическую геометрию, лучше отложить ее доказательство. Примем лучи AB и AC за оси координат (косоугольной системы!), а отрезки AB и AC — за единицы масштаба (неравные!!). Интересующие нас точки будут иметь следующие координаты: $A\ (0, 0)$, $B\ (1, 0)$, $C\ (0,1)$, $L\left(\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $M\left(0, \frac{1}{1+\mu}\right)$, $N\left(\frac{\nu}{1+\nu}, 0\right)$. Уравнение $AL: \lambda x - y = 0$, уравнение BM: $x + (1+\mu)\, y = 1$, уравнение CN: $(1+\nu)\, x + \nu y = \nu$. Решая эти уравнения попарно, найдем

$$A'\left(\frac{\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu}, \frac{1}{1+\mu+\mu\nu}\right),\quad B'\left(\frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda}, \frac{\nu\lambda}{1+\nu+\nu\lambda}\right),$$

$$C'\left(\frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu}, \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu}\right).$$

Отношение площадей треугольников выражается при помощи определителей третьего порядка

$$S' : S = \begin{vmatrix} x_{A'} & y_{A'} & 1 \\ x_{B'} & y_{B'} & 1 \\ x_{C'} & y_{C'} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\mu\nu}{1+\mu+\mu\nu} & \frac{1}{1+\mu+\mu\nu} & 1 \\ \frac{\nu}{1+\nu+\nu\lambda} & \frac{\nu\lambda}{1+\nu+\nu\lambda} & 1 \\ \frac{1}{1+\lambda+\lambda\mu} & \frac{\lambda}{1+\lambda+\lambda\mu} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)} \begin{vmatrix} \mu\nu & 1 & 1+\mu+\mu\nu \\ \nu & \nu\lambda & 1+\nu+\nu\lambda \\ 1 & \lambda & 1+\lambda+\lambda\mu \end{vmatrix}.$$

Из третьего столбца определителя вычитаем сумму первых двух

$$S' : S = \frac{1}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)} \begin{vmatrix} \mu\nu & 1 & \mu \\ \nu & \nu\lambda & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda\mu \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(1+\lambda+\lambda\mu)(1+\mu+\mu\nu)(1+\nu+\nu\lambda)} .$$

Если прямые AL, BM и CN проходят через одну точку, то $S' = 0$ и, следовательно, $\lambda\mu\nu = 1$.

Если читатель знаком только с декартовой системой координат (прямоугольной с равными масштабами по осям), то он может приписать исходным точкам координаты A (0, 0), B (a, 0), C (b, c) и проделать те же рассуждения, которые здесь изложены. Выкладки будут более громоздкими, но окончательный результат — тот же. Вот как важно при решении каждой задачи выбирать подходящий аппарат. **10.** После решения предыдущей задачи осталось сделать совсем немного. Координаты точек L, M и N уже найдены, отношение площадей вычисляется так же, как в предыдущей задаче. Если точки L, M и N лежат на одной прямой, то $S_0 = 0$ и, следовательно, $\lambda\mu\nu = -1$. **11.** Вместо обозначений λ, μ, ν введем $\lambda_{ij} = \dfrac{A_iA_{ij}}{A_{ij}A_j}$. Ясно, что $\lambda_{ij} \cdot \lambda_{ji} = 1$ (а). Положим, что явление Чевы имеет место в гранях, проходящих через вершину A_0. В таком случае $\lambda_{01}\lambda_{12}\lambda_{20} = 1$, $\lambda_{02}\lambda_{23}\lambda_{30} = 1$, $\lambda_{03}\lambda_{31}\lambda_{10} = 1$. Перемножая эти равенства и учитывая (а), получим $\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{31} = 1$, т. е. явление Чевы имеет место и в грани $A_1A_2A_3$.

Для доказательства второй части теоремы построим две тройки плоскостей

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1^0 &\equiv A_0A_1A_{23}, \\ \alpha_2^0 &\equiv A_0A_2A_{13}, \\ \alpha_3^0 &\equiv A_0A_3A_{12}, \end{aligned}\right\} \text{(б)} \qquad \left.\begin{aligned} \alpha_0^1 &\equiv A_1A_0A_{23}, \\ \alpha_2^1 &\equiv A_1A_2A_{03}, \\ \alpha_3^1 &\equiv A_1A_3A_{02}. \end{aligned}\right\} \text{(в)}$$

Все плоскости (б) содержат точку A_{123}, а плоскости (в) — точку A_{023}. Значит, плоскости (б) проходят через прямую A_0A_{123}, а плоскости (в) — через прямую A_1A_{023}. α_1^0 и α_0^1 — одна и та же плоскость. Итак, прямые A_0A_{123} и A_1A_{023} лежат в одной плоскости, и, следовательно, пересекаются (может быть, в несобственной точке). Аналогично доказывается пересечение любых двух прямых, соединяющих вершины тетраэдра с точками Чевы противоположных граней. Таким образом, прямые A_0A_{123}, A_1A_{023}, A_2A_{013} и A_3A_{012} *попарно* пересекаются. Это может быть лишь в двух случаях: 1) все четыре прямые имеют общую точку, 2) все четыре прямые лежат в одной плоскости. Второй случай исключается, так как на этих прямых лежат все вершины тетраэдра, т. е. второй случай означал бы, что все вершины тетраэдра лежат в одной плоскости. Остается первый случай, ч. т. д. Точку пересечения четырех прямых обозначим A_{0123}.

Остается доказать, что прямые, соединяющие дополнительные точки противоположных ребер, тоже проходят через точку A_{0123}. Эти три прямые принадлежат плоскостям (б) и, следовательно, пересекают прямую A_0A_{123}. Они также принадлежат плоскостям (в) и, следовательно, пересекают прямую A_1A_{023}. Последние прямые имеют лишь одну общую точку. Значит, прямые $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ и $A_{03}A_{12}$ либо проходят через эту точку, либо лежат в плоскости прямых A_0A_{123} и A_1A_{023}. Вторая возможность отвергается, потому что точки A_{23}, A_{13} и A_{12} лежат в грани $A_1A_2A_3$, а точки A_{01}, A_{02} и A_{03} не могут лежать в этой грани. Значит, прямые $A_{01}A_{23}$, $A_{02}A_{13}$ и $A_{03}A_{12}$ проходят через точку A_{0123}, ч. т. д.